

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# **DIPLOMSKI RAD**

**Jelena Kamenar**

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

# DIPLOMSKI RAD

Mentorica:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić, dipl.ing.

Studentica:

Jelena Kamenar

Zagreb, 2016.

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradila samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.*

*Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Tanji Jurčević Lulić na strpljenju, pruženoj pomoći te korisnim savjetima koji su mi pomogli u izradi ovog rada.*

*Hvala asistentici mag ing. Dariji Ćurko, kao i prof.dr.sc. Vladimiru Medvedu te asistentu Filipu Bolčeviću sa Kineziološkog fakulteta na iznimnom trudu i pomoći tijekom mjerenja.*

*Također se zahvaljujem kolegama iz firme Metalis na razumijevanju i podršci.*

*I na kraju, veliko hvala mojoj obitelji, posebice mojim roditeljima, bez kojih ništa od ovoga ne bi bilo moguće.*

Jelena Kamenar



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Jelena Kamenar**

Mat. br.: 0035186554

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

**Biomehanički model ljudske šake za rehabilitaciju pacijenata s  
parezom prstiju**

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

**Biomechanical model of human hand for rehabilitation of patients with  
finger paresis**

Opis zadatka:

Mnoge mišićne i neurološke bolesti šake, ozljede ligamenata i tetiva te prijelomi u području šake, zahtijevaju rehabilitaciju. Kod konstruiranja rehabilitacijskih uređaja, moguće je još u ranoj fazi, pomoću računalnog modela, analizirati karakteristike uređaja i efikasnost međudjelovanja rehabilitacijskog uređaja i dijela tijela za koji se treba provesti rehabilitacija.

Za rehabilitaciju šake kod pacijenata s parezom prstiju koja je posljedica moždanog udara, razvijeni su različiti rehabilitacijski uređaji. Postupak rehabilitacije najčešće obuhvaća fleksijsko i ekstenzijsko gibanje šake. Momenti u zglobovima pokazatelji su aktivnosti pojedinih mišića.

U radu je potrebno:

- objasniti anatomiju i fiziologiju šake,
- opisati biomehanički model šake,
- razviti matematički model ljudske šake koji će opisati fleksijsko i ekstenzijsko gibanje te ponašanje šake kod međudjelovanja s rehabilitacijskim uređajem te omogućiti analizu karakteristika uređaja za rehabilitaciju,
- kinematičke podatke koji opisuju fleksiju i ekstenziju šake utvrditi snimanjem pomoću BTS sustava Elite u Laboratoriju za biomehaniku Kineziološkog fakulteta,
- koristeći dinamiku sustava krutih tijela, odrediti unutarnje sile i momente koji se javljaju u zglobovima šake tijekom rehabilitacije.

Potrebne parametre modela dogovoriti s mentorom.

U radu treba navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

1

Zadatak zadan:

29. rujna 2016.

Rok predaje rada:

1. prosinca 2016.

Predviđeni datum obrane:

7., 8. i 9. prosinca 2016.

Zadatak zadao:

Prof.dr.sc. Tanja Jurčević Lulić

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

# I. SADRŽAJ

I.	SADRŽAJ.....	I
II.	POPIS SLIKA .....	III
III.	POPIS TABLICA.....	V
IV.	POPIS OZNAKA .....	VI
V.	SAŽETAK.....	IX
VI.	SUMMARY .....	X
1	UVOD.....	1
2	Anatomija šake i ručnog zgloba .....	2
2.1	Kosti .....	2
2.2	Zglobovi .....	3
2.3	Mišići .....	3
2.4	Tetive .....	6
3	Pokreti u zglobovima.....	8
3.1	Pokreti u ručnom zglobu .....	8
3.2	Pokreti između pešća i prve metakarpalne kosti .....	10
3.3	Pokreti u CMC zglobovima .....	11
3.4	Pokreti u MCP zglobovima.....	11
3.5	Pokreti u PIP i DIP zglobovima.....	13
4	Mehanizam pokreta .....	15
5	Antropometrija prstiju .....	17
6	KINEMATIKA.....	19
6.1	Kinematički parovi.....	19
6.2	Kinematički lanci .....	19
6.3	Stupnjevi slobode kinematičkog lanca.....	20
6.4	Određivanje položaja .....	20
6.4.1	Početne brzine i ubrzanja .....	20
6.5	Kinematička analiza.....	21
6.5.1	Početni položaj i pomaci elemenata sustava.....	21
6.5.2	Analiza brzina i ubrzanja .....	23

6.5.3	Inverzni problem kinematike .....	23
7	DINAMIKA .....	25
7.1	Dinamika sustava više tijela.....	25
7.1.1	Sustav više tijela .....	25
7.1.2	Zavisne i nezavisne koordinate .....	25
7.2	Dinamička analiza.....	26
7.3	Matrica mase .....	27
7.4	Vanjske sile .....	28
8	MATEMATIČKI MODEL .....	29
8.1	Opis matematičkog modela.....	29
8.2	Jacobijeva matrica.....	33
8.3	Vektori brzina i ubrzanja.....	35
9	Mjerenje.....	36
9.1	Kalibracija sustava .....	36
9.2	Markeri.....	37
9.3	Snimanje pokreta.....	38
9.4	Matrica mase .....	39
9.5	Kinematički podatci .....	41
10	REZULTATI .....	43
10.1	Rezultati kinematičke analize .....	44
10.2	Rezultati dinamičke analize .....	49
11	ZAKLJUČAK.....	52
12	LITERATURA .....	53
	PRILOZI.....	54

## II. POPIS SLIKA

Slika 1. Grupe kostiju šake [2] .....	2
Slika 2. Kost i zglobovi šake [1] .....	3
Slika 3. Mišić fleksori - pregibači ( <i>m.flexor digitorum superficialis</i> – lijevo i <i>m.flexor digitorum profundus</i> - desno) [2] .....	5
Slika 4. Mišići ekstenzori - opružači (redom s lijeva na desno - <i>m.extensor digitorum communis</i> , <i>m.extensor indicis</i> te <i>m.extensor digiti minimi</i> ) [2].....	5
Slika 5. Remenčići fleksorskih tetiva .....	7
Slika 6. Prikaz pokreta u ručnom zglobu [2].....	8
Slika 7. Pokreti zgloba ručja i prve metakarpalne kosti [2] .....	11
Slika 8. Pokreti u MCP zglobovima [2] .....	12
Slika 9. Pokreti u zglobovima članaka prstiju [2] .....	14
Slika 10. Koordinatni sustav u prstu [1].....	18
Slika 11. Prikaz mogućih gibanja slobodnog tijela [6] .....	19
Slika 12. Geometrijska interpretacija Newtonove metode [9] .....	22
Slika 13. Sustav sa: a) dva nepovezana kruta tijela, b) dva povezana kruta tijela .....	26
Slika 14. Biomehanički model šake koji se sastoji od 4 kruta tijela (I-IV), 8 točaka (P1-P8), tri okretna zgloba (R1-R3) te koji ima 6 stupnjeva slobode (D1-D6) .....	29
Slika 15. Model šake sa prikazom kuta u ručnom zglobu.....	31
Slika 16. Model šake sa prikazom kuta $\theta_3$ .....	31
Slika 17. Model šake sa prikazom kuta $\theta_2$ .....	32
Slika 18. Model šake sa prikazom kuta $\theta_1$ .....	32
Slika 19. BTS sustav na Kineziološkom fakultetu u Zagrebu.....	36
Slika 20. Određivanje koordinatnog sustava u radnom volumenu.....	37
Slika 21. Prikaz postavljenih markera.....	37
Slika 22 Definiranje brojeva markera .....	38
Slika 23. Fleksija i ekstenzija šake.....	39
Slika 24. Postupak analize podataka u <i>Smart Analyzer</i> -u .....	41
Slika 25. <i>Smart Analyzer</i> - protokol za koordinate i kuteve .....	42
Slika 26. <i>Smart Analyzer</i> - protok za brzine i ubrzanja .....	42
Slika 27 Dijagram toka za program u <i>Matlab</i> -u.....	43

Slika 28. Statistička analiza rezultata .....	44
Slika 29. Kinematički podaci gibanja u zglobovima (redom s lijeva na desno: D1,D2,D3,D4,D5,D6) gdje prvi red prikazuje položaj, drugi brzinu, a treći ubrzanje.....	45
Slika 30. Kinematički podatci za točku 1 .....	46
Slika 31. Kinematički podatci za točku 2.....	46
Slika 32. Kinematički podatci za točku 3.....	47
Slika 33. Kinematički podatci za točku 4.....	47
Slika 34. Kinematički podatci za točku 5.....	48
Slika 35. Kinematički podatci za točku 6.....	48
Slika 36. Kinematički podatci za točku 7.....	49
Slika 37. Kinematički podaci za točku 8.....	49
Slika 38. Reakcijske sile u šaci .....	50
Slika 39. Prikaz momenata u zglobovima R1, R2, R3 te ručnom zglobu.....	51



### III. POPIS TABLICA

---

Tablica 1. Pokreti u ručnom zglobu [2].....	8
Tablica 2. Mišići koji vrste pokrete u ručnom zglobu.....	9
Tablica 3. Pokreti između pešća i prve metakarpalne kosti [2] .....	10
Tablica 4. Zglobne komponente i pokreti u MCP zglobovima [2] .....	12
Tablica 5. Pokreti u PIP i DIP zglobovima [2] .....	13
Tablica 6. Funkcije sedam glavnih mišića pokretača šake (FCR, FCU, ECRB, ECRL, ECU, FDP te FDS) [1] .....	15
Tablica 7. Fiziološka i mehanička svojstva mišića i tetiva ručnog zgloba (1).....	15
Tablica 8. Duljine falanga u odnosu na duljinu šake, prikazane u postotcima (%) [1].....	16
Tablica 9. Dimenzije interfalagealnih zglobova (veličina i standardna devijacija) u mm [1] .	17
Tablica 10. Položaji središta zgloba od distalnog kraja falange za svaki prst [1].....	17
Tablica 11. Prosječne antropometrijske vrijednosti za falange ženskog kažiprsta [11].....	39

## IV. POPIS OZNAKA

---

$I, \dots, IV$	broj segmenata na modelu	-
<b>A</b>	pridružena matrica	-
<b>C</b>	matrica transformacije	-
$c_1, c_2$	numerički koeficijenti matrice transformacije	-
<b>F</b>	vektor koncentrirane sile $F$	N
<b>g</b>	vektor vanjskih sila	N
<b><math>g_e</math></b>	koncentrirana sila raspodijeljena po točkama	N/m
$I_i$	polarni moment tromosti	kgm <sup>2</sup>
$i, j$	početna točka	-
<b>J</b>	Jakobijanova matrica	-
$L_{ij}$	duljina tijela	m
<b>M</b>	matrica mase	kg
$M_1, \dots, M_4$	iznos momenata u zglobovima	Nm
$n$	broj stupnjeva slobode gibanja	-
$P_1, \dots, P_8$	karakteristične točke na modelu šake	-
<b>q</b>	vektor poopćenih (unutarnjih) koordinata	-
$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$	poopćene (unutarnje) brzine	m/s
$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n$	poopćena (unutarnja) ubrzanja	m/s <sup>2</sup>
<b><math>\dot{\mathbf{q}}</math></b>	vektor poopćenih (unutarnjih) brzina	m/s
<b><math>\ddot{\mathbf{q}}</math></b>	vektor poopćenih (unutarnjih) ubrzanja	m/s <sup>2</sup>
$q_1, q_2, \dots, q_n$	poopćene (unutarnje) koordinate	-
$R_1, R_2, R_3$	zglobovi modela	-

$R_{x1}, R_{y1}, \dots, R_{x4}, R_{y4}$	reakcijske sile u šaci	N
$\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$	vektor položaja točaka $i, j$	
$t$	vrijeme	s
$\mathbf{X}$	vektor vanjskih koordinata	-
$\bar{x}_G, \bar{y}_G$	koordinate težišta segmenta u odnosu na početnu točku	-
$\dot{\mathbf{X}}$	vektor vanjskih brzina	m/s
$\ddot{\mathbf{X}}$	vektor vanjskih ubrzanja	m/s <sup>2</sup>
$x_1, x_2, \dots, x_8$	koordinate apscise karakterističnih točaka na modelu	-
$x, y, z$	koordinatne osi	-
$y_1, y_2, \dots, y_8$	koordinate ordinate karakterističnih točaka na modelu	-
GRČKA SLOVA		
$\gamma$	vektor ubrzanja	m/s <sup>2</sup>
$\varepsilon$	greška Newton-Raphson-ove metode	-
$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$	kutovi između segmenata na modelu	rad
$\lambda$	vektor Lagrangeovih multiplikatora	-
$\mathbf{v}$	vektor brzine	m/s
$\Phi_q$	Jacobijeva matrica	-
$\Phi$	vektor kinematičkih veza	-

## POPIS KRATICA

A1-A5	remenići fleksorskih tetiva
CMC	karpalometakarpalni zglobovi
DIP	distalno – interfalangealni zglobovi
ECRB	kratki radijalni ispružач zapešća (lat. <i>extensor carpi radialis brevis</i> )
ECRL	dugi radijalni ispružач zapešća (lat. <i>extensor carpi radialis longus</i> )
ECU	ulnarni ispružач zapešća (lat. <i>extensor carpi radialis ulnaris</i> )

FCR	radijalni pregibač zapešća (lat. <i>flexor carpi radialis</i> )
FCU	ulnarni pregibač zapešća (lat. <i>flexor carpi ulnaris</i> )
FDP	duboki pregibač prstiju (lat. <i>flexor digitorum profundus</i> )
FDS	površinski pregibač prstiju (lat. <i>flexor digitorum superficialis</i> )
FL	dužina mišićnih vlakana
IP	intefalangealni zglobovi
MCP	metakarpofalangealni zglob
PCSA	fiziološki poprečni presjek površine
PIP	proksimalno – interfalangealni zglob

## V. SAŽETAK

---

U ovom je radu postavljen model za 2D kinematičku i dinamičku analizu pokreta šake služeći se dinamikom sustava krutih tijela, a koristeći Kartezijeve koordinate. Kinematički problem bavio se analizom pokreta, brzine i ubrzanja, a dinamički analizom unutarnjih sila i momenata koji se javljaju tijekom rehabilitacije.

Na početku je dan kratak uvid u anatomiju i fiziologiju ljudske šake, koji je potreban radi boljeg opisivanja modela. Isto tako, opisani su pokreti koje je čovjek u mogućnosti izvesti.

Nadalje, kratko je opisana teorija mehanizama, kinematika i dinamika.

Prvo su provedena mjerenja pomoću BTS sustava koji se nalazi u laboratoriju za biomehaniku Kineziološkog fakulteta u Zagreba, a zatim su dobiveni podatci (koordinate položaja markera) korišteni u daljnjoj analizi u programskom paketu *Matlab*. Naposljetku su dobiveni iznosi sila i momenata koji su bitni kod konstruiranja rehabilitacijskog uređaja.

**Ključne riječi:** biomehanika šake, matematički model, dinamička analiza, rehabilitacijski uređaj.

## VI. SUMMARY

---

This thesis describes a 2D model for kinematic and dynamic analysis of hand movements using the dynamic multibody system of rigid bodies, and using Cartesian coordinates. Kinematic analysis of the problem dealt with the movement, speed and acceleration, and dynamic analysis with internal forces and moments that occur during rehabilitation.

At the beginning there will be a brief insight into the anatomy and physiology of the human hand, which is needed in order to describe the model. Also, it describes the movements that a person is able to perform.

Furthermore, it describes the theory of mechanisms, kinematics and dynamics.

First, the measurements were recorded using the BTS system located at the Faculty of Kinesiology in Zagreb, and then the results of the data (coordinates of the markers) that were used in further analysis in MATLAB were obtained. Finally, the analysis of the obtained results, which can be used at the construction of a rehabilitation unit, was carried out.

**Key words:** Hand biomechanics, Mathematical model, Dynamic analysis, Rehabilitation device.

# 1 UVOD

Biomehanika je znanost koja se bavi silama koje djeluju na neki biološki sustav te proučava način njihovog djelovanja. U ovom radu, fokusirati će se na gornje udove, točnije na šaku, sa ciljem da se što bolje opiše matematički model gibanja šake kako bi se ubrzala rehabilitacija šake, kako bi se omogućio što bolji uvid u mnogobrojne faktore koji dovode do ozljeda te kako bi se one naposljetku spriječile.

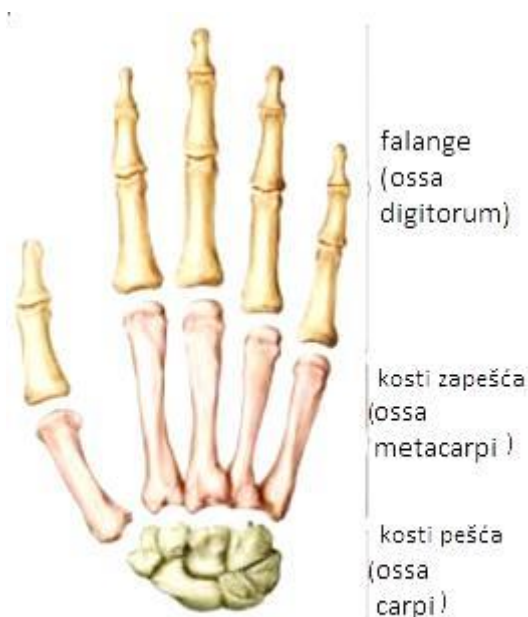
U radu je opisan razvoj matematičkog modela ljudske šake koristeći formulaciju sustava više tijela sa prirodnim koordinatama koje točno opisuju kretanje i ponašanje ljudske šake te njezinu interakciju sa uređajem za rehabilitaciju. S ove perspektive, korištenje dinamičkih alata sustava više tijela pokazalo se kao uspješna metoda za računanje momenata i unutarnjih opterećenja koja se pojavljuju u zglobovima ljudske šake tijekom rehabilitacijskih pokreta. Sljedeća važna karakteristika je korištenje mehaničkih zakona na živim strukturama te, na taj način i korištenje neinvazivnih metoda. Izrazi za računanje reaktivnih sila u zglobovima i određivanje momenata koje stvaraju mišići tijekom određenog zadatka, dobiveni su na temelju jednadžbi gibanja koje su na sistematičan, biomehanički prihvatljiv način podvrgnute analizi, umjesto da su prikazane samo kao rezultat nekog mjernog uređaja.

Poznavanje sila i momenata u zglobovima bitno je za konstruiranje rehabilitacijskog uređaja jer omogućuje u ranoj fazi konstruiranja analizu karakteristika uređaja kod međudjelovanja rehabilitacijskog uređaja i dijela tijela za koji se provodi rehabilitacija.

## 2 Anatomija šake i ručnog zgloba

### 2.1 Kost

Ljudska šaka ima 27 kostiju koje su podijeljene u tri grupe: kosti pešća (*ossa carpi*) ili karpalne, kosti zapešća (*ossa metacarpi*) ili metkarpalne te članke prstiju ili falange (*phalanges digitorum manus*) kao što je prikazano na Slici 1.



**Slika 1. Grupe kostiju šake [2]**

Kosti pešća ima osam koje su poredane u dva usporedna reda te su imenovane prema oblicima. U proksimalnom (gornjem) se redu nalaze čunasta, polumjesečasta, trokutasta te graškasta kost, dok se u distalnom (donjem) nalaze trapezna, trapezodina, glavičasta te kukasta kost.

Kostiju zapešća ima pet te se označavaju rimskim brojevima od I-V. Svaka kost zapešća ima proksimalan kraj (bazu), središnji dio (trup) te distalni dio (glavu) (Slika 2).

Članci prstiju šake također se označavaju rimskim brojevima I-V, a svaki prst ima svoj zasebni naziv: palac, kažiprst, srednji prst, prstenjak te mali prst. Svi prsti, osim palca, imaju tri članka. Palac ima proksimalni i distalni članak, dok ostali prsti imaju i srednji članak [1].

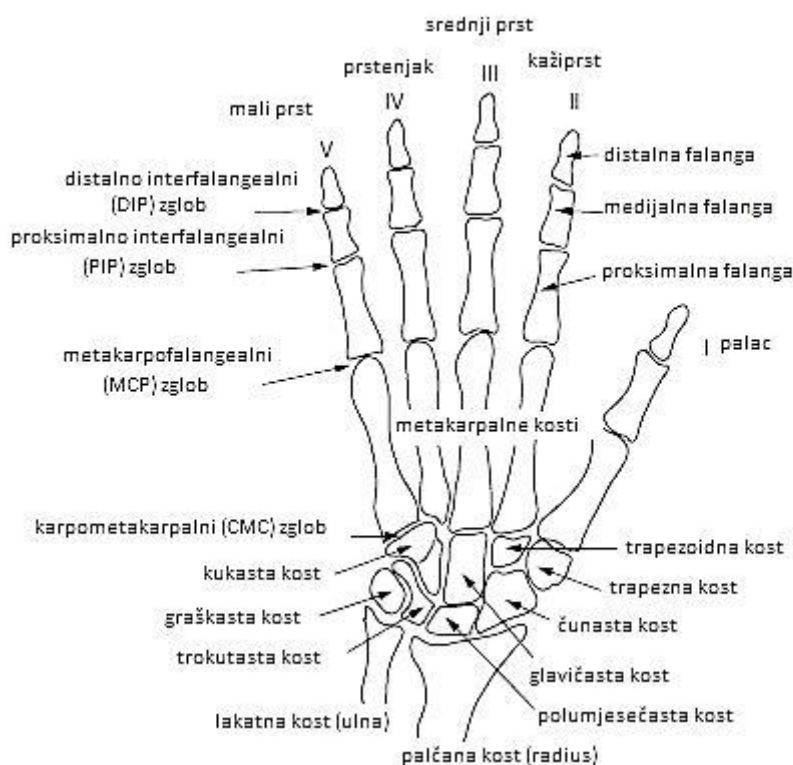


## 2.2 Zglobovi

Zglobovi šake dijele se na:

- zglobove kostiju pešća (zglobovi kostiju proksimalnog reda, distalnog reda te srednji zglob pešća)
- zglobovi kostiju zapešća (zglobovi kostiju pešća sa kostima zapešća, međusobno zglobovi zapešća te zglobovi kostiju zapešća sa falangama prstiju)
- zglobovi članaka prstiju (gornji zglobovi prstiju – PIP, donji zglobovi prstiju – DIP)

Četiri su zglobova u svakom prstu, od proksimalnog prema distalnom: CMC (karpometakarpalni), MCP (metakarpofalangealni), PIP (proksimalno-interfalangealni), DIP (distalno-interfalangealni), kako je prikazano na slici 3.



Slika 2. Kost i zglobovi šake [1]

## 2.3 Mišići

Razlikujemo 19 mišića podlaktice. Površinski sloj započinje od ramene kosti, lat. *humerusa*, a duboki sloj od proksimalne polovice radijusa, ulne i međukoštane opne podlaktice (membrane

*interossea antebrachii*). Distalno mišići prelaze u tetive koje se postupno hvataju na kosti podlaktice, kosti korijena šake, odnosno metakarpalne kosti i prste [3].

Mišiće šake možemo podijeliti u tri skupine [3]:

- četiri mišića tenara, palčanog uzvišenja (koji pokreću palac): *m. abductor pollicis brevis*, *m. opponens pollicis*, *m. flexor pollicis brevis* i *m. adductor pollicis*
- tri mišića u sredini šake su: *mm. lumbicales*, *mm. interossei palmares* i *mm. interossei dorsales*
- četiri mišića hipotenara, uzvisine malog prsta (mišići koji pokreću mali prst) su: *m. palmaris brevis*, *m. abductor digiti minimi*, *m. flexor digiti minimi brevis* i *m. opponens digiti minimi*.

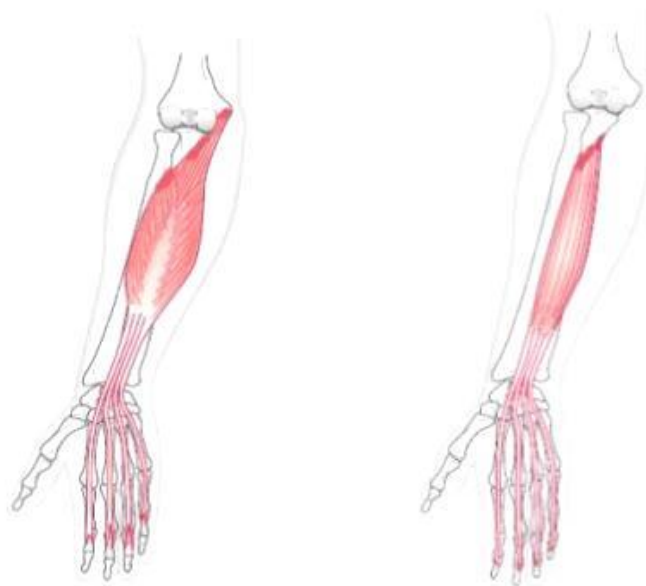
Osim u interakciji s laktom, podlaktica ima vlastite pokrete pronacije (uvrtanja), polupronacije i supinacije (izvrtanja) te stoga ima određene mišiće za te pokrete. Mišići podlaktice služe za: odmicanje (abdukcija) i primicanje šake (adukcija), za uvrtnje (pronacija) i izvrtanje šake (supinacija) te za opružanje (ekstenzija) i pregibanje šake i prstiju (fleksija).

Prednji mišići podlaktice su: obli pronator, radijalni pregibač zapešća, dugačkii dlanski mišić, ularni pregibač zapešća, površinski pregibač prstiju, duboki pregibač prstiju, dugački pregibač palca i četverokutni pronator. Lateralni mišići podlaktice su: nadlaktičnopalčani mišić, dugi radijalni ispružać zapešća, kratki radijalni ispružać zapešća i supinacijski mišić. Stražnji mišići podlaktice su: ispružać prstiju, ispružać malog prsta, ularni ispružać zapešća, lakatni mišić, dugački odmicač palca, dugački ispružać palca, kratki ispružać palca i ispružać kažiprsta.

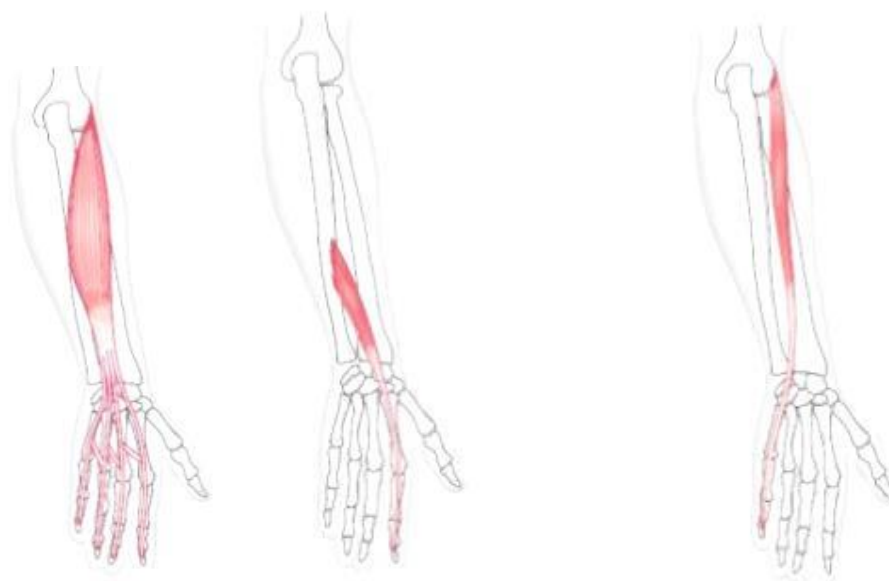
Svaki se prst može savijati i opružiti, primicati i kružiti. Fleksija je daleko najjači pokret. Kod ljudi, postoje dva velika mišića koji proizvode fleksiju svakog prsta, i dodatnih mišića koji povećavaju pokrete. Svaki prst se može kretati neovisno o drugima, iako skupni mišići koji pokreću svaki prst mogu biti djelomično uklopljeni, a tetiva može biti priključena na međusobni ostatak fibroznog tkiva, sprečavajući potpuno slobodno kretanje.

Prsti ne sadrže mišiće (osim *arrector pili*). Mišići koji pokreću zglobove prsta su u tenaru (palčanjoj uzvisini) šake i podlaktici. Duge tetive koje omogućuju kretanje podlaktičnih mišića mogu se uočiti pod kožom na zglobu i na poledini ruke.

Mišići prstiju se mogu podijeliti na vanjske i unutarnje. Vanjski mišići su dugi fleksori (savijači) i ekstenzori (opružaći), a prikazani su na Slikama 4 i 5. Nazivaju se vanjski jer se mišićno tijelo nalazi na podlaktici.



**Slika 3. Mišić fleksori - pregibači (*m.flexor digitorum superficialis* – lijevo i *m.flexor digitorum profundus* - desno) [2]**



**Slika 4. Mišići ekstenzori - opružači (redom s lijeva na desno - *m.extensor digitorum communis*, *m.extensor indicis* te *m.extesor digiti minimi*) [2]**

Prsti imaju dva duga fleksora, koji se nalaze na donjoj strani podlaktice. Duboki fleksori su pridodani distalnoj falangi, a površinski fleksori sredini falange. Fleksori omogućuju savijanje prstiju. Palac ima po jedan dugi i kratki savijač u tenarnoj grupi mišića. Ljudski palac ima i druge mišiće u tenarnoj grupi (oponenirajućih mišića), čime se pokreće u opoziciji, što omogućuje prihvaćanje predmeta.

Opružači se nalaze na zadnjoj strani podlaktice i povezani su na složeniji način nego fleksori za leđa prstiju. Tetive se sjedinjuju sa mišićima *interosseous* i *lumbricus* te omogućuje

formiranje mehanizma opružanja. Primarna funkcija ekstenzora je usmjeravanje prstiju. Palac ima dva ekstenzora u podlaktici; njihove tetive formiraju tenarski čvor. Kažiprst i mali prst imaju i dodatni ekstenzor, koji se koristi za, na primjer, pokazivanje. Opružači se nalaze na šest posebnih mjesta:

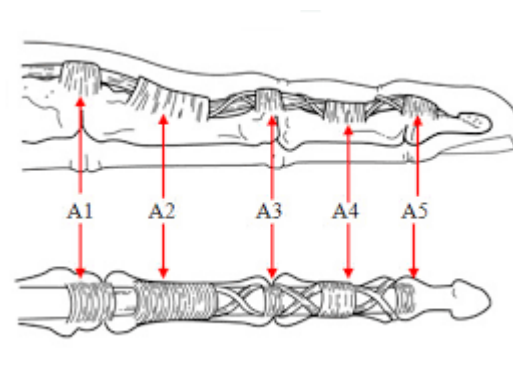
1. hvatač *pollicis longus* i ekstenzor *pollicis brevis*;
2. ekstenzor *carpi radialis longus i brevis*;
3. ekstenzor *pollicis longus*, ekstenzor *digitorum indicis*;
4. *digitorum communis*;
5. ekstenzor *digiti minimi*;
6. ekstenzor *carpi ulnaris*.

U unutarnoj grupi mišića su tenarni i hipotenarni mišići (tenar u korijenu palca, hipotenar malog prsta), leđni *interossei* ruke i palmarni *interossei* mišići (između metakarpalnih kostiju) i lumbrikalni mišići ruke. Lumbrikalni proizlaze iz dubokog fleksora *digitorum profundus* (i posebni su jer nemaju koštano porijeklo), na mehanizmu leđnih ekstenzornih omotača [4].

## 2.4 Tetive

Za biomehaniku fleksorskih tetiva bitne su tetivne ovojnice s volarnim remenčićima, tj. mostićima (engl. *pulley*). Ove remenčiće prvi su opisali Doyle i Blythe počevši 1975. godine u cijelom nizu radova. Razlikujemo slijedeće cirkularne (engl. *annular*) remenčiće fleksornih tetiva, prikazane na Slici 5: A1 u razini MCP zgloba, A2 u razini proksimalne falange, A3 u razini proksimalnog interfalangealnog (PIP) zgloba, A4 u razini distalne falange i A5 u razini distalnog interfalangealnog (DIP) zgloba. Oni fiksiraju fleksorne tetive za pripadajuće falange i zglobove i sprječavaju tzv. efekt «strune na gudalu» (engl. *bow-stringing*). U tom učinku su od najveće važnosti remeni A2 i A4.

Između cirkularnih remenčića su križni remeni i to C1 između A2 i A3, C2 između A3 i A4 te C3 između A4 i A5. Ovaj prostor između cirkularnih remenčića može biti otvoren i omogućava dobar pristup na fleksorsku tetivu [5].



**Slika 5. Remenčići fleksorskih tetiva**

### 3 Pokreti u zglobovima

Pokrete koji se odvijaju u šaci možemo podijeliti na tri razine: pokrete u zglobovima između kostiju pešća i zapešća (to su minimalni pokreti osim u zglobu palca), u zglobovima između zapešća i članaka prstiju te u zglobovima između članaka prstiju.

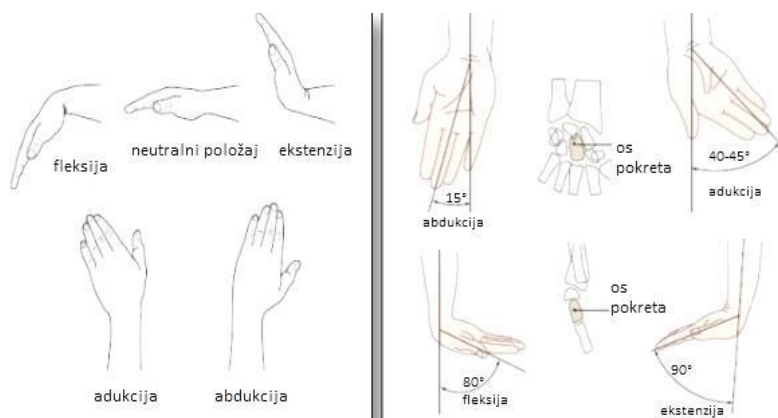
Potrebno je razlikovati fleksiju (pregibanje), ekstenziju (opružanje, adukciju (privođenje), abdukciju (odvođenje) te kružno kretanje ili rotacije prve metakarpalne kosti, pokret koji je najvažniji za hvatanje predmeta. Ti su pokreti prikazani na Slici 6.

#### 3.1 Pokreti u ručnom zglobu

Za funkciju šake vrlo je važan normalan i bezbolan opseg pokreta ručnog zgloba. Opseg pokreta (uključujući i one u zglobovima između proksimalnog i distalnog reda kostiju pešća – mediokarpalni zglob) iznosi 80° za fleksiju i 90° za ekstenziju [3]. U Tablici 1, prikazana je vrsta ručnog zgloba te pokreti (Slika 6) i osi oko kojih se ti pokreti vrše.

**Tablica 1. Pokreti u ručnom zglobu [2]**


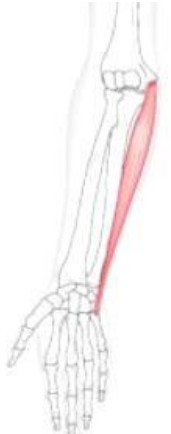
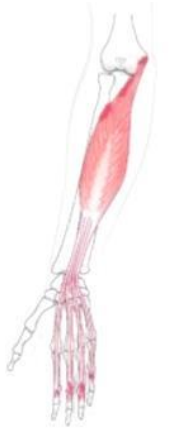

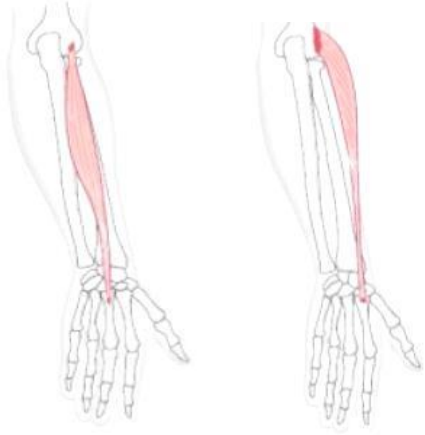


Vrsta zgloba	Art.elipsoidea – prema obliku zglobnih površina pripada tipu jajastog zgloba		pokreti oko dvije osi
Pokreti	<b>pregibanje</b> <i>Flexio</i> (volarna fleksija)	<b>Odvođenje, abdukcija</b> <i>Abductio</i> (radijalna devijacija)	<b>Kružno kretanje</b> <b>Circumductio</b>
	<b>Opružanje</b> <i>Extensio</i> (dorzalna fleksija)	<b>Privođenje, adukcija</b> <i>Adductio</i> (ulnarna devijacija)	
Osi oko kojih se vrše pokreti	poprečna	radioulnarna, (pregibanje, opružanje)	
	uzdužna	prednjezadnja, sagitalna osovina (abdukcija, adukcija)	



**Slika 6. Prikaz pokreta u ručnom zglobu [2]**

U Tablici 2 dan je pregled mišića koji vrše pokrete u ručnom zglobu.

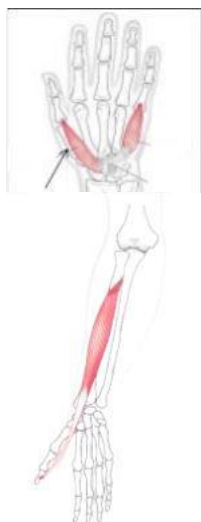
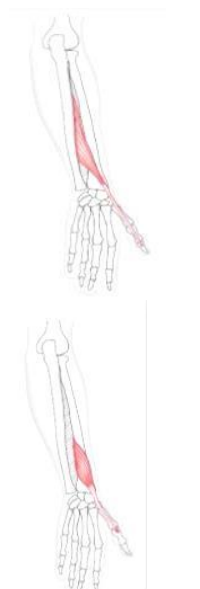


**Tablica 2. Mišići koji vrste pokrete u ručnom zglobu**

Pokreti	Mišići koji vrše pokrete			
<b>Volarna fleksija, fleksija</b>	Radijalni pregibač zapešća	Ulnarni pregibač zapešća	Površinski pregibač prstiju	Duboki pregibač prstiju
				
	<i>m.flexor carpi radialis (FCR)</i>	<i>m.flexor carpi ulnaris (FCU)</i>	<i>m.flexor digitorum superficialis (FDS)</i>	<i>m.flexor digitorum profundus (FDP)</i>
<b>Dorzalna fleksija, ekstenzija</b>	Dugi radijalni ispružać zapešća i kratki radijalni ispružać zapešća		Ulnarni ispružać zapešća	Ispružać prstiju
				
	<i>m.extensor carpi radialis longus et brevis (ECRL i ECRB)</i>		<i>m.extensor carpi ulnaris (ECU)</i>	<i>m.extensor digitorum</i>
<b>Abdukcija</b>	<i>m.flexor carpi radialis</i>		<i>m.extensor carpi radialis longus et brevis</i>	
<b>Adukcija</b>	<i>m.flexor carpi ulnaris</i>		<i>m.extensor carpi ulnaris</i>	

### 3.2 Pokreti između pešća i prve metakarpalne kosti

Za funkciju šake osobito su važni palčani zglobovi, od kojih zglob između kosti pešća i prve kosti zapešća dopušta velike amplitude pokreta što je prikazano u Tablici 3.

**Tablica 3. Pokreti između pešća i prve metakarpalne kosti [2]**

Zglobne površine	Proksimalna konkavna		donja strana <i>os trapezium</i>		
	Distalna konveksna		baza i metakarpalne kosti		
Tip zgloba	<i>art.sellaris</i> , dvoosni zglob				
Zglobna čahura	labava, tanka, omogućava veliku amplitudu pokreta				
Pokreti	fleksija/ekstenzija, abdukcija/adukcija, opozicija/repozicija, kružni pokreti				
Mišići	dugački pregibač palca, kratki pregibač palca	dugački ispružać palca, kratki, ispružać palca	<i>m.adductor pollicis</i>	<i>m.abductor pollicis longus et brevis</i>	<i>m.opponens pollicis</i>
	 <i>m.flexor pollicis longus et brevis</i>	 <i>m.extensor pollicis longus et brevis</i>	 <i>m.adductor pollicis</i>	 <i>m.abductor pollicis longus et brevis</i>	



Opozicija/repozicija su pokreti karakteristični samo za čovjeka. Opozicija palca je pokret kod kojeg vrh palca dodiruje jagodice ostalih prstiju. Repozicija palca je pokret pri kojem se vrh palca odmiče od ostalih prstiju. Na Slici 7 možemo vidjeti prikaz opozicije/repozicije, ekstenzije/fleksije te abdukcije/adukcije.



**Slika 7. Pokreti zgloba ručja i prve metakarpalne kosti [2]**

### 3.3 Pokreti u CMC zglobovima

CMC zglobovi nalaze se na bazama četiriju metakarpalnih i distalnom redu karpalnih kostiju te su stabilizirani međukoštanim ligamentima kako bi omogućili ograničene pokrete. Ipak, najvažnija funkcija CMC zgloba je stvaranje šupljine dlana te omogućiti prilagođavanje šake i prstiju obliku objekta kojim se rukuje.

### 3.4 Pokreti u MCP zglobovima

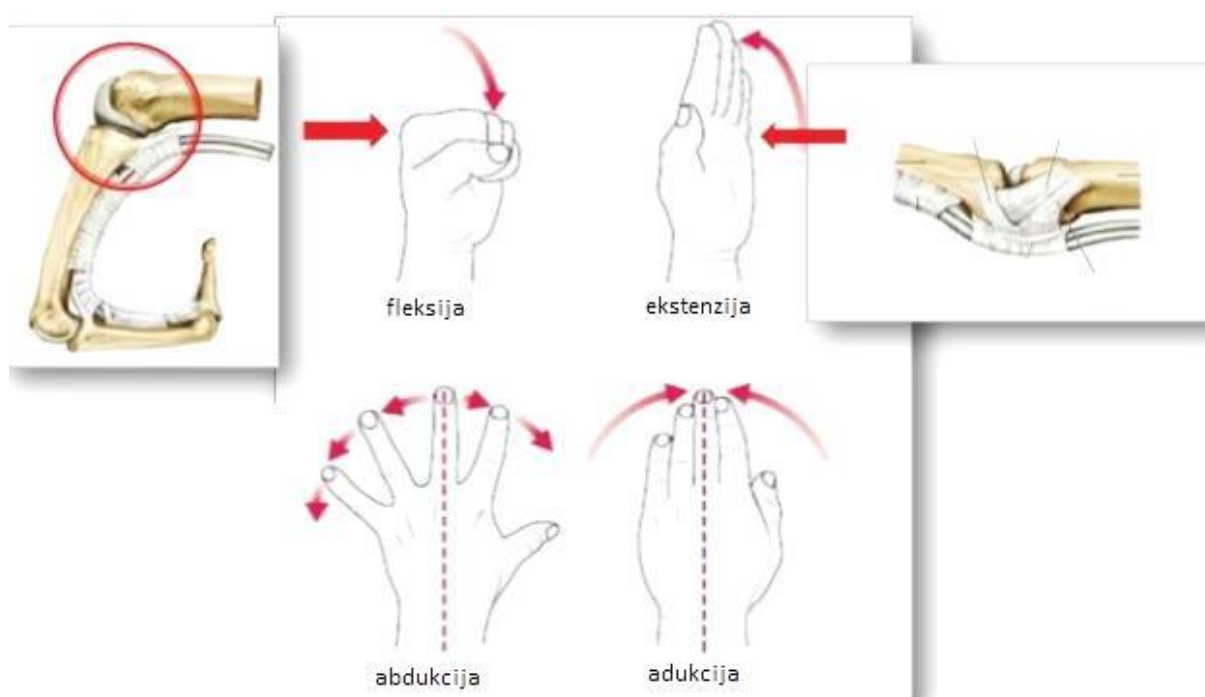
MCP zglobovi sastoje se od konveksne metakarpalne glave i konkavne baze proksimalnih članaka prstiju te su stabilizirani zglobnom čahurom i ligamentima. Omogućena je fleksija od  $90^\circ$  i ekstenzija od  $20^\circ$  do  $30^\circ$  od neutralne plohe u sagitalnoj ravnini. Razina fleksije razlikuje se među prstima (i među pojedincima) gdje obično mali prst ima najveći kut pokreta koji iznosi oko  $95^\circ$ . Radijalna i ulnarna devijacija iznose od  $40^\circ$  do  $60^\circ$  u frontalnoj ravnini, gdje kažiprst ima abdukciju (odvođenje) i adukciju (privođenje) do  $60^\circ$ , srednji prst i prstenjak do  $45^\circ$  te mali prst do  $50^\circ$ . Opseg pokreta MCP zglobova smanjuje se kako se povećava kut

fleksije. Također je moguća djelomična rotacija [1]. U Tablici 4, dan je sažet prikaz zglobnih komponentata i pokreta u MCP zglobovima.

**Tablica 4. Zglobne komponente i pokreti u MCP zglobovima [2]**

Zglobne površine	proksimalne	distalni krajevi glava metakarpalnih kostiju
	distalne	proksimalni krajevi baza proksimalnih članaka prstiju
Zglobne čahure	Posebne za svaki zglob, tanke, labave	
Zglobne veze	Prednje i bočne veze, transverzalna vlakna	
Pokreti	fleksija, ekstenzija, abdukcija, adukcija, kružni pokreti	

Kod prstiju, abdukcija i adukcija podrazumijevaju pokret odvođenja i privođenja prstiju od središnje osovine šake koja prolazi kroz srednji prst, kao što je prikazano na Slici 8.



**Slika 8. Pokreti u MCP zglobovima [2]**

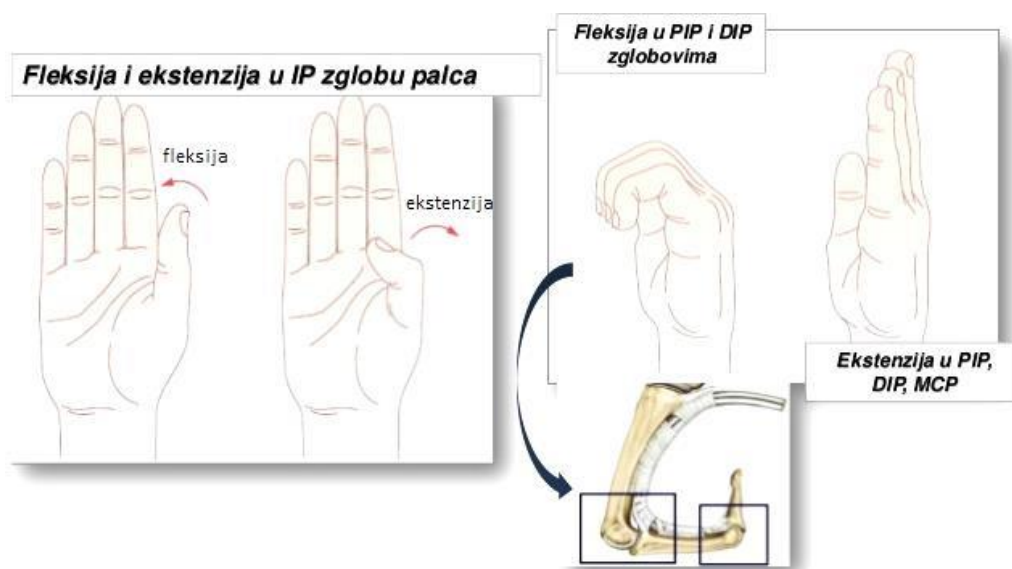
### 3.5 Pokreti u PIP i DIP zglobovima

IP (interfalangealni) zglobovi, kao i šarka, omogućavaju samo fleksiju i ekstenziju (Slika 9). Svaki prst ima dva IP zgloba, PIP i DIP, osim palca, koji ima samo jedan. Najveći opseg fleksije od  $100^\circ$  do  $110^\circ$  imaju PIP zglobovi, dok manji opseg od  $60^\circ$  do  $70^\circ$  imaju DIP zglobovi. Hiperekstenzija ili ekstenzija preko neutralne pozicije, zbog labavosti ligamenta, može biti prisutna u DIP i PIP zglobovima [1].

Tablica 5 prikazuje podatke o zglobnim površinama, zglobnim vezama te pokretima u PIP i DIP zglobovima.

**Tablica 5. Pokreti u PIP i DIP zglobovima [2]**

<b>Gornji zglob članaka prstiju (PIP)</b>	
Konveksne zglobne površine nalaze se na distalnim krajevima (glavama) proksimalnih članaka, oblika valjka. Konkavne zglobne površine su na proksimalnim krajevima (bazama) medijalnih članaka.	Zglobne veze pojačane su prednjim (palmarnim) i bočnim (kolateralnim) vezama.
<b>Pokreti</b>	pregibanje i opružanje, tip šarke
<b>Donji zglobovi članaka prstiju (DIP)</b>	
Konveksne zglobne površine nalaze se na distalnim krajevima (glavama) medijalnih članaka, oblika valjka. Konkavne zglobne površine su na proksimalnim krajevima (bazama) distalnih članaka.	Zglobne veze pojačane su prednjim (palmarnim) i bočnim (kolateralnim) vezama.
<b>Pokreti</b>	pregibanje i opružanje, tip šarke



**Slika 9. Pokretu u zglobovima članaka prstiju [2]**

Čimbenici koji omogućuju stabilnost zglobova i optimalnu gibljivost su brojni, a mogu se podijeliti u tri skupine: pasivni stabilizatori, fizikalni činitelji i aktivni stabilizatori. Pasivni stabilizatori su zglobna čahura i ligamenti. Aktivni stabilizatori su mišići i pripadajuće strukture (tetive i vezivne ovojnice mišića). Tonus mišića aktivno međusobno privlači zglobna tijela i tako ih stabilizira [5].

## 4 Mehanizam pokreta

Sedam je glavnih mišića koji su uključeni u pokretanje šake: radijalni pregibač zapešća (lat. *flexor carpi radialis* - FCR), ulnarni pregibač zapešća (lat. *flexor carpi ulnaris* - FCU), duboki pregibač prstiju (lat. *flexor digitorum profundus* - FDP), površinski pregibač prstiju (lat. *flexor digitorum superficialis* - FDS), kratki radijalni ispružać zapešća (lat. *extensor carpi radialis brevis* - ECRB), dugi radijalni ispružać zapešća (lat. *extensor carpi radialis longus* - ECRL), te ulnarni ispružać zapešća (lat. *extensor carpi radialis ulnaris* - ECU).

Glavna funkcija FCR, FCU, ECRB, ECRL te ECU je pomicati ručni zglob, dok su FDP te FDS u seknudarni pokretači ručnog zgloba. Njihova primarna funkcija je fleksija i ekstenzija prstiju te, sekundarno, rotacija ručnog zgloba. FDP i FDS prolaze kroz karpalni tunel. U Tablici 6, nabrojani su glavni mišići te opisani pokreti koje čine [1].

**Tablica 6. Funkcije sedam glavnih mišića pokretača šake (FCR, FCU, ECRB, ECRL, ECU, FDP te FDS) [1]**

<b>Fleksija</b>	FCR, FCU
<b>Ekstenzija</b>	ECRB, ECRL, ECU
<b>Radijalna devijacija (abdukcija)</b>	FCR, ECRB, ECRL
<b>Ulnarna devijacija (adukcija)</b>	FCU, ECU

Parametri kojim se najčešće opisuju mišići su duljina mišićnih vlakana (FL) te fiziološki poprečni presjek površine (PCSA).

Duljina mišića je povezana s mehaničkim potencijalom tetive za ekstenziju, a maksimalno naprezanje koje može podnijeti povezano je sa njegovim poprečnim presjekom, PCSA.

U Tablici 7 dani podatci za fiziološka i mehanička svojstva mišića i tetiva ručnog zgloba, gdje „+“ označava fleksiju i radijalnu devijaciju, a „-“, ekstenziju i ulnarnu devijaciju.

**Tablica 7. Fiziološka i mehanička svojstva mišića i tetiva ručnog zgloba (1)**

Mišići i tetive	Fiziološka veličina		Pomak tetive (mm)		Momentni krak (mm <sup>2</sup> )	
	Duljina (cm)	PCSA (cm <sup>2</sup> )	F/E ravnina	R/U ravnina	F/E ravnina	R/U ravnina
<b>FCR</b>	10,9 – 12,4	2,0	24±4	7±1	+15±3	+8±2
<b>FCU</b>	15,2 – 15,4	3,2 – 3,4	28±4	13±3	+16±3	-14±3
<b>ECRB</b>	13,8 – 15,8	2,7 – 2,9	30±3	11±1	-12±2	+13±2
<b>ECRL</b>	11,8 – 18,3	1,5 – 2,4	12±3	17±1	-7±2	+19±2
<b>ECU</b>	13,6 – 14,9	2,6 – 3,4	10±2	16±2	-6±1	-17±3

Tablica 7 pokazuje kako FCR, FCU te ECRB pružaju veće produljenje tetive tijekom fleksijskog i ekstenzijskog pokreta od ECRL i ECU, dok ECRL i ECU imaju veće produljenje tetive tijekom radijalne i ulnarne devijacije.

Rezultati pokazuju da su FCR i FCU primarni mišići zaduženi za fleksiju, ECRV za ekstenziju, ECRL za radijalnu devijaciju te ECU za ularnu devijaciju.

U Tablici 8 dan je prikaz duljina članaka prstiju (falanga) u odnosu na duljinu šake za žene te izraženo u postotcima (%).

**Tablica 8. Duljine falanga u odnosu na duljinu šake, prikazane u postotcima (%)**  
[1]

<b>Falanga</b>	<b>Proksimalna</b>	<b>Medijalna</b>	<b>Distalna</b>
<b>Palac</b>	17,1	-	12,1
<b>Kažiprst</b>	21,8	14,1	8,6
<b>Srednji prst</b>	24,5	15,8	9,8
<b>Prstenjak</b>	22,2	15,3	9,7
<b>Mali prst</b>	17,7	10,8	8,6

Unatoč trodimenzionalnoj orijentaciji tetiva šake prema osima rotacije i kompleksnosti karpalne kosti, Tablica 8 pokazuje da su krakovi na kojima se vrše momenti koji pokreću zglobov konzistentni i dobro korespondiraju s anatomskim smještajem tetiva.

## 5 Antropometrija prstiju

Za svaki biomehanički model kod kojeg se koriste statičke jednadžbe ravnoteže, potrebno je imati široki spektar različitih antropometrijskih podataka, kao što su duljine elemenata, visine, položaji središta mase, položaji središta rotacije, opseg pokreta za svaki zglob itd. Nisu sve od navedenih informacija za svaki prst izmjerene i dokumentirane, međutim, Tablica 9 pokazuje neke korisne podatke o dimenzijama IP zglobova, gdje su prsti označeni rimskim brojevima od I-V, tako da je I – palac, II - kažiprst, III – srednji prst, IV – prstenjak i V – mali prst. Širina prsta mjeri se u odnosu na osi z, a debljina na osi y sa Slike 10.

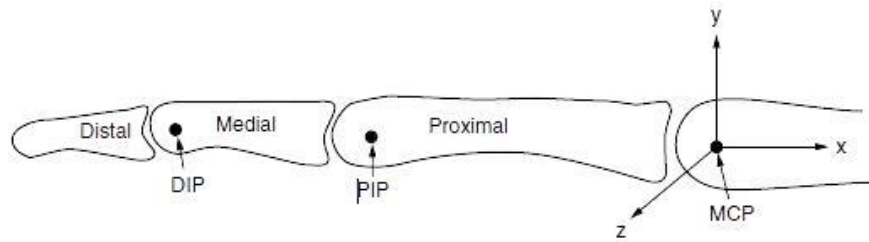
**Tablica 9. Dimenzije interfalagealnih zglobova (veličina i standardna devijacija) u mm [1]**

Zglob	Širina		Debljina	
	Muškarci	Žene	Muškarci	Žene
<b>IP (I)</b>	22,9 (3,8)	19,1 (1,3)	20,1 (1,5)	16,8 (1,0)
<b>PIP (II)</b>	21,3 (1,3)	18,3 (1,0)	19,6 (1,3)	16,3 (1,0)
<b>DIP (II)</b>	18,3 (1,3)	15,5 (1,0)	15,5 (1,3)	13,0 (1,0)
<b>PIP (III)</b>	21,8 (1,3)	18,3 (1,0)	20,1 (1,5)	16,8 (1,0)
<b>DIP (III)</b>	18,3 (1,3)	15,2 (1,0)	16,0 (1,3)	13,2 (1,0)
<b>PIP (IV)</b>	20,1 (1,3)	18,3 (1,0)	18,8 (1,3)	15,8 (1,0)
<b>DIP (IV)</b>	17,3 (1,0)	14,5 (0,8)	15,2 (1,3)	12,5 (0,8)
<b>PIP (V)</b>	17,8 (1,5)	14,5 (0,8)	16,8 (1,3)	14,0 (1,0)
<b>DIP (V)</b>	15,8 (1,3)	13,2 (0,8)	13,7 (1,3)	11,4 (0,8)

U Tablici 10, dani su podaci o udaljenostima središta zgloba od distalnog kraja falange, gdje je udaljenost DIP zgloba izražena u postocima (%) duljine medijalne falange, a PIP i MCP izražene u postocima (%) duljine proksimalne falange.

**Tablica 10. Položaji središta zgloba od distalnog kraja falange za svaki prst [1]**

Prst	DIP	PIP	MCP
<b>Kažiprst</b>	18	13	20
<b>Srednji prst</b>	15	12	20
<b>Prstenjak</b>	13	12	19
<b>Mali prst</b>	17	14	24



**Slika 10. Koordinatni sustav u prstu [1]**

Potrebno je primijetiti kako je  $x$ -os u aksijalnoj ravnini falange,  $y$ -os je okomita na prst te je okrenuta na dorzalnu (stražnju) stranu, dok je pozitivna  $z$ -os okrenuta radijalno za desnu šaku.

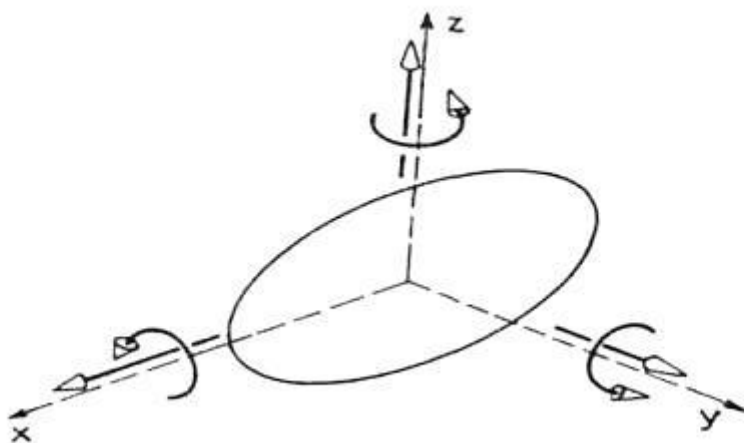


## 6 KINEMATIKA

Kako bi se bolje objasnio biomehanički model šake, potrebno je objasniti osnovne pojmove teorije mehanizama. Potrebno je proučiti tipove veza tijela koja čine mehanizam, a zatim različite strukture mehanizama.

### 6.1 Kinematički parovi

Kinematički par podrazumijeva dva međusobno povezana tijela, a njih dijelimo u zavisnosti od načina povezivanja ta dva tijela. Promatrat će se prvo jedno slobodno tijelo koje se može kretati na šest nezavisnih načina: translacijski duž osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  te se može okretati oko svake od tih osi; dakle tri slobodne translacije te tri slobodne rotacije (Slika 11). Da bi se jednoznačno odredio položaj tijela, potrebno je toliko veličina (parametara) koliko ima stupnjeva slobode gibanja, odnosno tri parametra za opisivanje translacijskog gibanja te tri da bi se odredila rotacija tijela [6].



Slika 11. Prikaz mogućih gibanja slobodnog tijela [6]

Dakle, broj stupnjeva slobode gibanja je broj nezavisnih parametara koji su potrebni da bi se jednoznačno odredio položaj tijela.

### 6.2 Kinematički lanci

Nizove tijela povezane kinematičkim parovima nazivamo kinematičkim lancima. Svako tijelo koje je element lanca, naziva se segmentom lanca. Njih smatramo krutim, nedeformabilnim tijelima. Lanac se, dakle, sastoji od niza zglobova i segmenata.

Kinematičke lance možemo, po jednoj od podjela, podijeliti na otvorene i zatvorene. Kod otvorenih ne postoji zatvoreni niz, tj. iz jedne se točke na lancu u drugu može doći samo

jednim putem. S druge strane, zatvoreni lanci posjeduju barem jedan zatvoreni niz segmenata i tada se iz jedne točke toga niza u drugu može doći na barem dva načina.

Za robotske je mehanizme karakteristično da tijekom rada robota kinematički lanac mijenja svoju strukturu od otvorene ka zatvorenoj i obrnuto [6].

### 6.3 Stupnjevi slobode kinematičkog lanca

U prethodnim se odlomcima utvrdio broj stupnjeva slobode za jedan kinematički par. Prema toj definiciji, dolazi se do toga da je broj stupnjeva slobode zglobnog kinematičkog lanca jednak broju mogućih nezavisnih gibanja tog lanca, odnosno jednak broju nezavisnih parametara potrebnih da bi se jednoznačno odredio položaj cijelog lanca.

Ako je u pitanju otvoreni lanac, tada je za definiranje položaja potrebno znati pomake u svim zglobovima lanca, dakle za koji kut je okrenut svaki rotacijski zglob i koliki je pomak u svakom translacijskom zglobu. Možemo zaključiti da je kod otvorenih lanaca broj stupnjeva slobode jednak broju zglobova.

Kod zatvorenih lanaca problem je složeniji jer broj stupnjeva slobode lanca nije jednak broju zglobova. Međutim, u ovom će se radu razmatrati otvoreni lanac [6].

### 6.4 Određivanje položaja

Mehanizam se, po pretpostavci, sastoji od  $n$  segmenata vezanih u lanac. Kada bi svi segmenti bili poznati, tada bi za svaki segment bilo potrebno 6 veličina da bi se jednoznačno odredio njegov položaj, a to znači  $6n$  veličina za cijeli lanac. Međutim, kada je u pitanju lanac sa  $n$  stupnjeva slobode gibanja, tada je dovoljno zadati  $n$  veličina da bi se jednoznačno odredio položaj cijelog lanca. Te  $n$  veličine nazivaju se poopćene koordinate sustava. U robotici se kao poopćene koordinate usvajaju pomaci u zglobovima mehanizma. Ako zadamo geometriju mehanizma, tada je dovoljno poznavati pomake u zglobovima da bi bio poznat položaj cijelog lanca.[6]

Poopćene koordinate  $q_1, \dots, q_n$  koje određuju međusobni položaj susjednih segmenata nazivaju se često unutarnjim koordinatama mehanizma. Tada je potrebno poznavati  $n$ -dimenzionalni vektor poopćenih, odnosno unutarnjih koordinata:

$$\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T \quad 1$$

#### 6.4.1 Poopćene brzine i ubrzanja

Poopćene brzine su derivacije poopćenih koordinata po vremenu, dakle:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T \quad 2$$

One predstavljaju derivacije pomaka u zglobovima mehanizama, odnosno brzine relativnog pomaka segmenata.

Iz derivacija poopćenih brzina slijede ubrzanja poopćenih koordinata:

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n]^T \quad 3$$

## 6.5 Kinematička analiza

Kinematički problemi čisto geometrijske prirode mogu se riješiti bez obzira na sile i karakteristike tromosti. Cilj kinematičke analize je tijekom analize izračunati položaj i orijentaciju tijela koja se nalaze u sustavu. Toliko je ulaznih elemenata, koliko je i stupnjeva slobode sustava više tijela.

Kinematička analiza pruža pogled na ukupno gibanje sustava više tijela, obuhvaća izračun pozicija, brzina i ubrzanja. Također je pomoću simulacija moguće otkriti koliziju, proučavati trajektorije točaka, analizirati položaj elemenata sustava više tijela te izračunati kutove rotacije.

### 6.5.1 Početni položaj i pomaci elemenata sustava

Pomak elemenata ovisi o početnom položaju elemenata. Ako je zadan početni položaj sustava više tijela poznat kao konačan pomak (ne infinitezimalni) za ulazno tijelo (ili element), problem konačnog pomaka sastoji se u pronalasku konačnog položaja sustava.

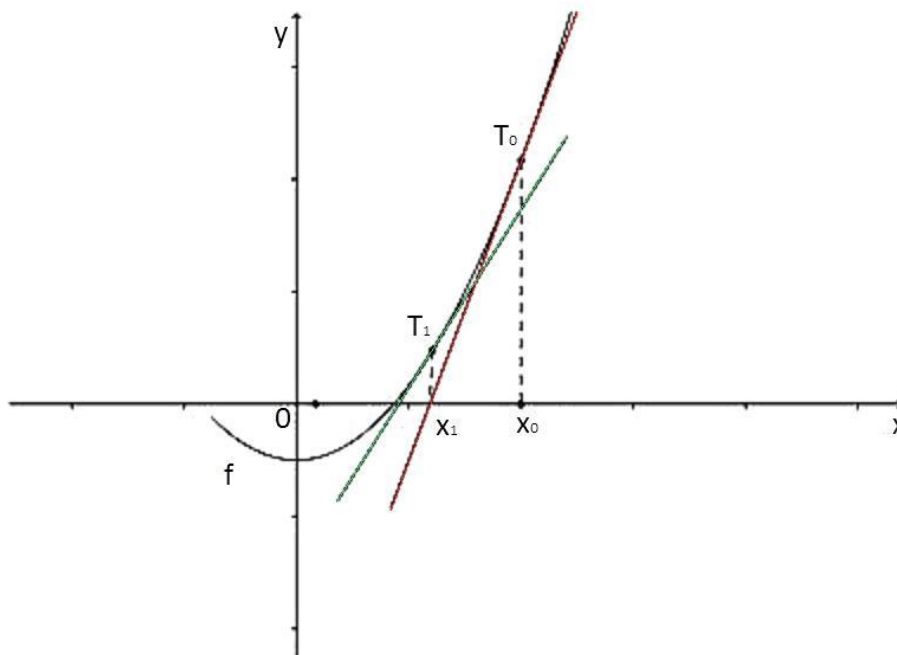
Zavisne koordinate stvaraju niz algebarskih jednadžbi koje predstavljaju međuzavisnost između koordinata. Definirajući vektor  $\mathbf{q}$  kao vektor zavisnih koordinata, tada rješenje kinematičkog problema izgleda:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad 4$$

Gdje je  $\Phi$  globalni vektor kinematičkih veza, tj. vektor koji sadrži sve kinematičke jednadžbe ograničenja u homogeni izraz. Vidljivo je da prethodni izraz eksplicitno ovisi o vremenu  $t$  [7].

Newtonova metoda ili metoda tangente je klasična shema rješavanja jednadžbi sve boljim aproksimacijama. Metoda počinje procjenom. Primjenom uzastopnih ponavljanja, tj. iteracija procjena vodi sve boljoj i boljoj procjeni. Proces iteracije približava se odgovoru kao dinamički sustav koji traži svoje stabilno stanje. Newtonova metoda je djelotvorna za polinomne jednadžbe višeg stupnja koje nisu izravno rješive. Kako je iteracija glavna snaga računala, pogodna je i za mnoštvo računalnih algoritama [8].

Ideja Newtonove metode je graf funkcije aproksimirati tangentom, kako je prikazano na slici 23. Pretpostavlja se da je zadana početna točka  $x_0$ . Ideja metode je povući tangentu na graf funkcije  $f$  u točki  $T_0(x_0, f(x_0))$  te definirati novu aproksimaciju  $x_1$  u točki presjeka tangente s osi  $x$  (Slika 12.). Dakle, Newtonova, Newton-Raphsonova ili metoda tangente sastoji se u tome da se  $n+1$  aproksimacija  $x_{n+1}$  odredi kao sjecište  $x$  osi i tangente na graf funkcije u točki s apscisom  $x_n$ .



**Slika 12. Geometrijska interpretacija Newtonove metode [9]**

Iz interpretacije se vidi da se točka  $x_{n+1}$  u odnosu na  $x_n$  nalazi u smjeru pada funkcije  $f$  (pod uvjetom da je  $f'(x_n) \neq 0$  (što je nužno da bi se mogao napraviti korak Newtonove metode). Na osnovu ovog zapažanja može se primijeniti globalna konvergentna Newtonova metoda [9].

Newton-Raphson-ova metoda primjenjena na opisani problem može se zapisati kao:

$$\Phi(\mathbf{q}_i, t) + \Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i) = 0 \quad 5$$

Gdje je  $\Phi_{\mathbf{q}}$  Jacobijeva matrica jednadžbi uvjeta, tj. matrica parcijalnih derivacija ovih jednadžbi u ovisnosti o zavisnim koordinatama. Prema tome, prethodna jednadžba mora se riješiti iterativno dok se ne dobije približno rješenje, ili izrazom napisano:

$$\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i = \Delta \mathbf{q}_i \leq \varepsilon \cong 0 \quad 6$$

gdje prethodna jednadžba predstavlja iterativni postupak rješavanja pomoću Newton-Raphson-ove metode, gdje je  $\varepsilon$  definirana prihvatljiva greška [7].

### 6.5.2 Analiza brzina i ubrzanja

Analizu brzina i ubrzanja lakše je provesti od problema određivanja položaja upravo zbog toga jer je to linearan problem te ima jedinstveno rješenje. U matematičkom smislu to znači da se problem sastoji od sustava linearnih jednadžbi.

Izračun brzina i ubrzanja pretpostavlja da, ukoliko su zadovoljene kinematičke jednadžbe ograničenja, tada mora vrijediti izraz povezan sa tim ograničenjima, a koji glasi:

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad 7$$

za brzine, te

$$\Phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad 8$$

za ubrzanja.

Proširivanjem tih izraza, dobiju se izrazi:

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = -\Phi_t \equiv \mathbf{v} \quad 9$$

$$\Phi_{\mathbf{q}}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = -\dot{\Phi}_t - \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{\gamma} \quad 10$$

Vektor  $\mathbf{v} = -\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  predstavlja parcijalnu derivaciju vektora  $\Phi$  po vremenu.

Vektor  $\mathbf{\gamma} = \mathbf{v}' - \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}$  je razlika deriviranog vektora brzina te derivirane Jacobijeve matrice pomnožene sa vektorom  $\dot{\mathbf{q}}$ , gdje je  $\dot{\mathbf{q}}$  vektor poopćenih (unutarnjih) brzina, a vektor  $\ddot{\mathbf{q}}$  vektor poopćenih (unutarnjih) ubrzanja [7].

### 6.5.3 Inverzni problem kinematike

Za preračunavanje unutarnjih koordinata gibanja u vanjske može se formirati algoritam:

$$\mathbf{X} = \eta(\mathbf{q}) \quad 11$$

Međutim, inverzni postupak  $\mathbf{q} = \eta^{-1}(\mathbf{X})$  bio bi previše kompliciran. Zato se traži veza unutarnjih i vanjskih brzina ( $\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{X}}$ ), kao i unutarnjih i vanjskih ubrzanja ( $\ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{X}}$ ). Te se veze dobivaju diferenciranjem prethodne relacije:

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad 12$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \frac{\partial \eta}{\partial q} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2} \dot{\mathbf{q}}^2 \quad 13$$

odnosno:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(q) \dot{\mathbf{q}} \quad 14$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}(q) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}(q, \dot{q}) \quad 15$$

gdje matricu  $\mathbf{J} = \frac{\partial \eta}{\partial q} q$  nazivamo Jakobijanova matrica, a matricu  $\mathbf{A} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial q^2} \dot{q}^2$  pridružena matrica. Kako bi preračunavanje brzine i ubrzanja u oba smjera bilo jednoznačno, smatra se da je  $\mathbf{J}$  kvadratna matrica i da je  $\det \mathbf{J} \neq 0$ , tj. da nema singulariteta [6].

## 7 DINAMIKA

Dinamika je područje klasične mehanike koja proučava djelovanje sila na gibanje tijela i obratno. Utemeljena je Newtonovim zakonima gibanja. Problemi dinamike mogu se svesti na direktne dinamičke probleme (eng. *forward dynamics*) koji se bave određivanjem gibanja sustava koji je opterećen silama i momentima te inverzne dinamičke probleme (eng. *inverse dynamics*) koji se pak bave određivanjem sila i momenata koje djeluju na sustav kojemu je poznato gibanje. Dinamika se osim tih područja bavi i vibracijama te se optimizacija (eng. *optimisation*) smatra posebnom granom dinamike [10].

### 7.1 Dinamika sustava više tijela

#### 7.1.1 Sustav više tijela

Dinamika sustava više tijela (eng. *multibody dynamics*) bavi se mehaničkim sustavom sastavljenim od međusobno povezanih krutih tijela kojima su dozvoljeni veliki pomaci i velike rotacije. Tijela su međusobno povezana elementima kinematičkih ograničenja i različitim elementima za povezivanje. Stvarna svojstva zadanog problema, kao što su viskoelastičnost i inercija, diskretizirana su tijekom procesa oblikovanja mehaničkog modela. Matematičko modeliranje stvorenog mehaničkog modela svodi se na obične diferencijalne jednadžbe ili diferencijalno-algebarske jednadžbe [10].

Kao što je navedeno u poglavlju 6.1., spajanjem dva kruta tijela dobijemo kinematski par ili jednostavnije – zglob. Svaki zglob ima određenu slobodu gibanja. U dvodimenzionalnom sustavu postoje dvije vrste zglobova, jedan dozvoljava jedan stupanj, a drugi dva stupnja slobode gibanja.

Na takav sustav mogu djelovati sile, koje mogu biti konzervativne kao što je gravitacijska sila te ne-konzervativne kao što je sila trenja.

#### 7.1.2 Zavisne i nezavisne koordinate

Kako bi opisali sustav više tijela, važno je dobro matematički opisati pokret. Drugim riječima, potrebno je odabrati koordinatne sustave koji bi nedvosmisleno definirale položaj, brzinu i ubrzanje sustava u bilo kojem trenutku.

Odabirom zavisnih koordinata dobivamo sustav jednadžbi čiji je broj jednak broju stupnjeva slobode gibanja sustava više tijela i, prema tome, minimalan. S druge strane, broj nezavisnih koordinata je veći od broja stupnjeva slobode sustava više tijela te se na taj način taj sustav može lakše opisati, iako je povezan nizom algebarskih jednadžbi poznatih kao jednadžbe ograničenja. U većini slučajeva, nezavisne koordinate nisu primjereno rješenje za analizu zbog toga što ne ispunjavaju zahtjev da koordinatni sustav mora nedvosmisleno definirati položaj sustava više tijela. U stvari, nezavisne koordinate direktno određuju poziciju segmenata tijela, ali ne i poziciju cijelog sustava.

Prema tome, zavisne koordinate stvaraju broj potrebnih jednažbi koji je jednak razlici između broja zavisnih koordinata i broja stupnjeva slobodne gibanja. Jednažbe ograničenja su generalno nelinearne te igraju veliku ulogu u kinematici i dinamici sustava više tijela. Takve su koordinate alternativni izbor nezavisnim koordinatama jer one ne definiraju jednoznačno položaj svih tijela.

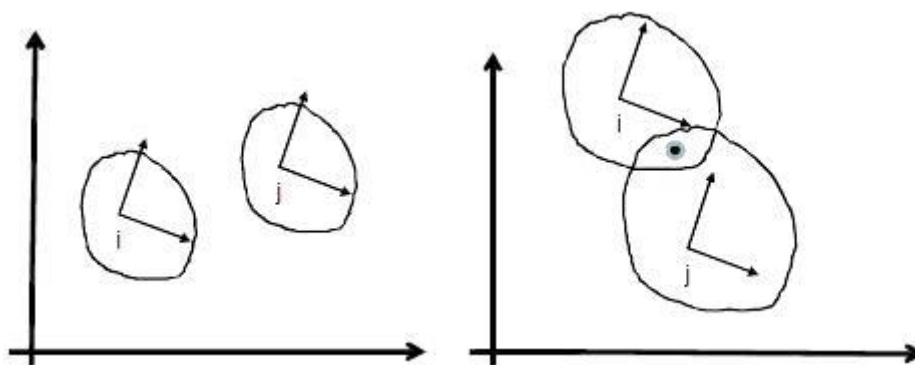
Prethodno postavljeni problem rješavat će se pomoću prirodnih koordinata. Važno je naglasiti da, budući da svako tijelo ima najmanje dvije točke, njegov položaj i orijentacija određeni su Kartezijevim koordinatama te polarne koordinate tu nisu potrebne.

Dvodimenzionalni sustav više tijela sastojat će se od niza točaka koje će biti opisane Kartezijevim koordinatama.

## 7.2 Dinamička analiza

Dinamičke su analize mnogo kompleksnije za rješavanje od kinematičkih. Najveći razlog je taj što dinamičke analize uključuju sile koje djeluju na sustav više tijela kao i karakteristike tromosti, tj. masu, tenzor tromosti te položaj težišta.

Nekoliko je načina zapisivanja jednažbi gibanja sustava više tijela. Prvo će se uzeti u obzir sustav sa dva nepovezana kruta tijela. (Slika 13 a)).



**Slika 13. Sustav sa: a) dva nepovezana kruta tijela, b) dva povezana kruta tijela**

Prema Newton-Euler-ovim jednažbama, jednažbe gibanja mogu se zapisati kao:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g} \quad 16$$

Gdje je  $\mathbf{g}$  poopćeni vektor vanjskih sila, a  $\mathbf{M}$  matrica mase koja sadrži masu i svojstva tromosti svakog krutog tijela.

Ako je umjesto krutog tijela uzet sustav povezanih tijela (Slika 13 b)), tada se prethodni izraz mijenja u:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}^{(i)} = \mathbf{g} \quad 17$$



Gdje  $\mathbf{g}^{(i)}$  predstavlja poopćeni vektor unutarnjih sila koje djeluju na sustav. Koristeći metodu Lagrangeovog multiplikatora, ove se sile mogu izraziti kao funkcija Jacobijeve matrice (koja daje smjer ovih sila) i vektora  $\boldsymbol{\lambda}$  nepoznatih Lagrangeovih multiplikatora (koji opisuju njihov iznos). Taj izraz glasi:

$$\mathbf{g}^{(i)} = \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad 18$$

Kada uvrstimo gornju jednadžbu u prethodnu, dobivamo jednadžbu gibanja koja glasi:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} \quad 19$$

Budući da su  $\boldsymbol{\lambda}$  i  $\ddot{\mathbf{q}}$  nepoznati, nužno je uvesti dodatnu jednadžbu kako bi se riješio problem:

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\gamma} \quad 20$$

Rezultat je sustav jednadžbi gibanja modela:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g} \\ \Phi_q \ddot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\gamma} \end{cases} \quad 21$$

Zapisan u obliku matrica, prethodni izraz glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad 22$$

Dobivena jednadžba gibanja mora biti integrirana u ovisnosti o vremenu.

### 7.3 Matrica mase

Matrica mase ovisi o vrstama koordinata koje su izabrane za opisivanje sustava više tijela. Matrica za dvodimenzionalan problem opisivanja krutog tijela, glasi:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m - \frac{2m\bar{x}_G}{L_{ij}} & 0 & \frac{m\bar{x}_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & -\frac{m\bar{y}_G}{L_{ij}} \\ 0 & m - \frac{2m\bar{x}_G}{L_{ij}} & \frac{m\bar{y}_G}{L_{ij}} & \frac{m\bar{x}_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} \\ \frac{m\bar{x}_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & \frac{m\bar{y}_G}{L_{ij}} & \frac{I_i}{L_{ij}^2} & 0 \\ -\frac{m\bar{y}_G}{L_{ij}} & \frac{m\bar{x}_G}{L_{ij}} - \frac{I_i}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{I_i}{L_{ij}^2} \end{bmatrix} \quad 23$$

Gdje je  $I_i$  polarni moment tromosti u odnosu na početnu točku  $i$ ,  $m$  je masa elementa (krutog tijela),  $L_{ij}$  je duljina tijela,  $\bar{x}_G$ ,  $\bar{y}_G$  su koordinate središta mase u odnosu na točku  $i$  [7].

#### 7.4 Vanjske sile

Djelovanje vanjskih koncentriranih sila na sustav više tijela opisan prirodnim koordinatama zahtjeva transformaciju koordinata koje opisuju koncentriranu silu  $\mathbf{F}$ , a koja djeluje u točki  $P$  te izjednačavanje sa ekvivalentnom poopćenom silom  $\mathbf{g}_e$  raspodijeljenom po točkama koje definiraju kruto tijelo, prema formuli:

$$\mathbf{g}_e = \mathbf{C}^T \mathbf{F} \quad 24$$

Gdje je  $\mathbf{g}_e$  ekvivalentna poopćena sila koja djeluje na element,  $\mathbf{F}$  vanjska koncentrirana sila i  $\mathbf{C}$  matrica transformacije koja glasi:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (1 - c_1) & c_1 & c_1 & -c_2 \\ -c_2 & (1 - c_1) & c_2 & c_1 \end{bmatrix} \quad 25$$

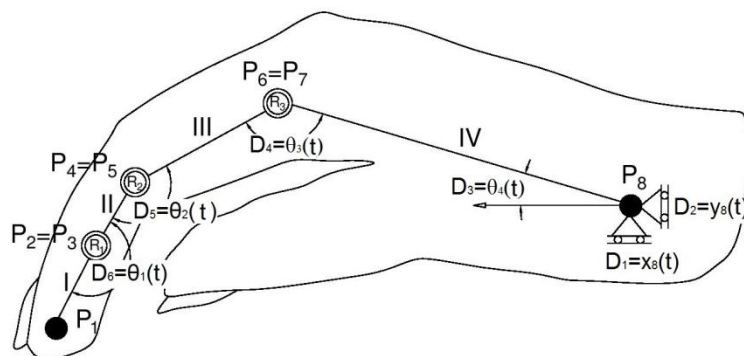
Gdje su  $c_1$  i  $c_2$  numerički koeficijenti koji su dobiveni izračunavanjem iz lokalnih koordinata točke  $P$  na referentnom koordinatnom sustavu krutog tijela [7].

## 8 MATEMATIČKI MODEL

Razne bolesti mogu pogoditi ljudsku ruku: od različitih ozljeda kao što su frakture, ozljede tetiva i ligamenata, spazam kod moždanog udara te mnoge druge bolesti. Sva ova stanja direktno utječu na mobilnost ruke. Uređaj za rehabilitaciju može uspješno utjecati na oporavak šake, od funkcije, pokreta te vraćanje normalnih sposobnosti šake. Postoji mnogo različitih vrsta uređaja za rehabilitaciju šake te svaki od njih ima određenu svrhu kod rehabilitacije.

### 8.1 Opis matematičkog modela

Biomehanički sustav za kojeg se radi dvodimenzionalni model jest šaka, počevši od metakarpalnih kostiju te završavajući na distalnim falangama, kao što je označeno na Slici 14. Radi se o 2D modelu koji isključuje gravitacijsku silu budući da ona djeluje okomito na promatranu  $xy$  ravninu. Na taj se način dobije model koji je lakše opisati, a kojim se uspješno provodi analiza sila i momenata. Interakcija s rehabilitacijskim uređajem promatra se u dinamičkom smislu te se uzima sila konstantnog iznosa koji je jednak 2 N, ide od određene točke na tijelu do određene točke na uređaju (u ovom radu je to dinamometar).



**Slika 14. Biomehanički model šake koji se sastoji od 4 kruta tijela (I-IV), 8 točaka (P1-P8), tri okretna zgloba (R1-R3) te koji ima 6 stupnjeva slobode (D1-D6)**

Kao što je vidljivo sa Slike 14, model je opisan pomoću četiri kruta tijela (metakarpalnih kostiju - IV, proksimalne - III, srednje - II te distalne - I falange) koja su povezana pomoću tri okretna zgloba. Uzimajući u obzir da su svakom tijelu potrebne dvije točke kako bi ono bilo u potpunosti definirano te da se okretni zglobovi također uzimaju kao dvije nezavisne točke, tada je model opisan sa ukupno osam točaka (tj. 16 prirodnih koordinata) koje, složene u vektor, izgledaju kao:

$$\mathbf{q} = \{x_1, y_2, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5, x_6, y_6, x_7, y_7, x_8, y_8\}_{(16 \times 1)}^T \quad 26$$

Pomnija analiza otkriva kako model ima šest stupnjeva slobode, dva translacijska i jedan rotacijski kod ručnog zgloba te tri rotacijska kod okretnih zglobova. Prema tome, broj kinematičkih ograničenja, potrebnih kako bi se izrazila ovisnost između prirodnih koordinata, jednak je razlici između broja koordinata te broja stupnjeva slobode, a to je  $16-6=10$  kinematičkih ograničenja.

Sva kinematička ograničenja, prikazana su u obliku algebarskih jednadžbi različitih priroda: 4 kinematička ograničenja krutog tijela koja nastoje očuvati konstantnu duljinu krutih tijela označenih rimskim brojevima od I do IV; 6 jednadžbi kinematičkih ograničenja okretnih zglobova koje opisuju 3 okretna zgloba; te 6 jednadžbi kinematičkih ograničenja kinematičkih pokretača kojima se u potpunosti opisuje gibanje sustava tijekom kinematičke i dinamičke analize.

Analitičke jednadžbe glase [7]:

- kruto tijelo (konstantne duljine)

$$\text{Tijelo I: } \Phi_1 = \mathbf{r}_{12}^T \cdot \mathbf{r}_{12} - L_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad 27$$

$$\text{Tijelo II: } \Phi_2 = \mathbf{r}_{34}^T \cdot \mathbf{r}_{34} - L_{34}^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - L_{34}^2 = 0 \quad 28$$

$$\text{Tijelo III: } \Phi_3 = \mathbf{r}_{56}^T \cdot \mathbf{r}_{56} - L_{56}^2 = (x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 - L_{56}^2 = 0 \quad 29$$

$$\text{Tijelo IV: } \Phi_4 = \mathbf{r}_{78}^T \cdot \mathbf{r}_{78} - L_{78}^2 = (x_8 - x_7)^2 + (y_8 - y_7)^2 - L_{78}^2 = 0 \quad 30$$

gdje se skalarni produkt vektora koristi za opisivanje odnosa između koordinata.

- Rotacijski zglobovi:

$$\text{Zglob R1: } \Phi_{5,6} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \begin{Bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 31$$

$$\text{Zglob R2: } \Phi_{7,8} = \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_4 = \begin{Bmatrix} x_5 - x_4 \\ y_5 - y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 32$$

$$\text{Zglob R3: } \Phi_{9,10} = \mathbf{r}_7 - \mathbf{r}_6 = \begin{Bmatrix} x_7 - x_6 \\ y_7 - y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 33$$

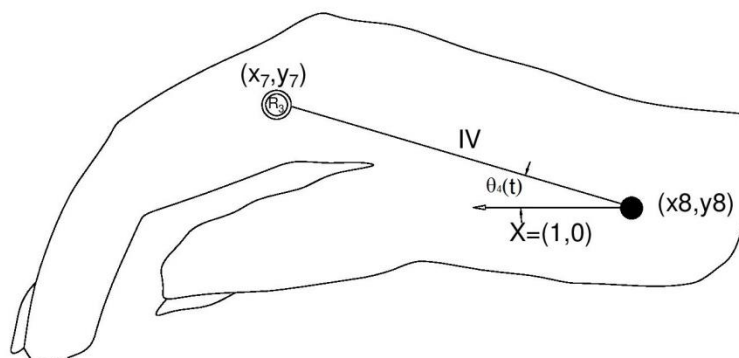
- Gibanje u zglobovima:

Translacija ručnog zgloba (translacija točke 8):

$$\Phi_{11,12} = \begin{Bmatrix} x_8 - x_8(t) \\ y_8 - y_8(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 34$$

Rotacija ručnog zgloba (D3) – kut ručnog zgloba (Slika 15) označen s  $\theta_4$ :

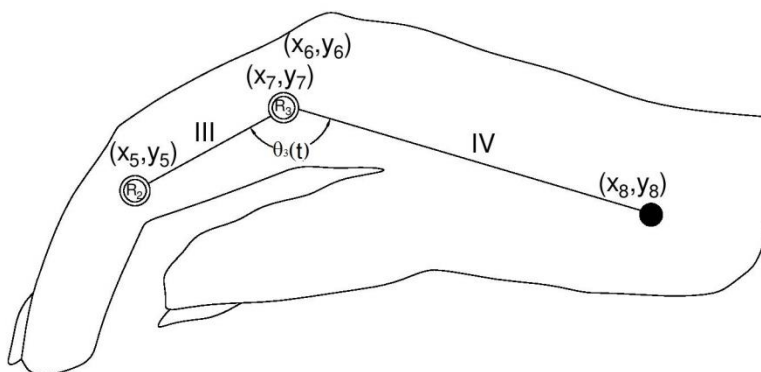
$$\Phi_{13} = \mathbf{r}_{78} \times \mathbf{X} - L_{78} \sin \theta_4(t) = -(y_7 - y_8) - L_{78} \sin \theta_4(t) = 0 \quad 35$$



**Slika 15. Model šake sa prikazom kuta u ručnom zglobu**

Rotacija u zglobu D4 - kut između metakarpalne i proksimalne falange (Slika 16) označen s  $\theta_3$ :

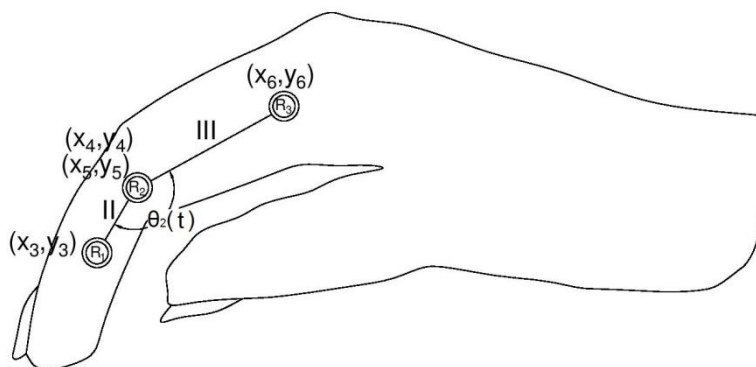
$$\begin{aligned} \Phi_{14} &= \mathbf{r}_{78} \times \mathbf{r}_{65} - L_{78} \\ &\quad \cdot L_{65} \cdot \sin \theta_3(t) \\ &= -(y_8 - y_7) \cdot (x_5 - x_6) + (x_8 - x_7) \cdot (y_5 - y_6) \\ &\quad - L_{78} \cdot L_{56} \cdot \sin \theta_3(t) = 0 \end{aligned} \quad 36$$



**Slika 16. Model šake sa prikazom kuta  $\theta_3$**

Rotacija u zglobu D5 - kut između proksimalne i srednje falange (Slika 17) označen s  $\theta_2$  :

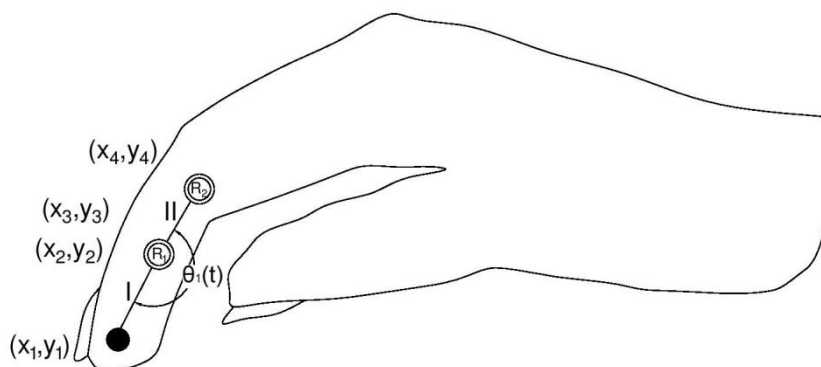
$$\begin{aligned} \Phi_{15} &= \mathbf{r}_{56} \times \mathbf{r}_{43} - L_{56} \\ &\quad \cdot L_{43} \cdot \sin \theta_2(t) \\ &= -(y_6 - y_5) \cdot (x_3 - x_4) + (x_6 - x_5) \cdot (y_3 - y_4) \\ &\quad - L_{56} \cdot L_{43} \cdot \sin \theta_2(t) = 0 \end{aligned} \quad 37$$



**Slika 17. Model šake sa prikazom kuta  $\theta_2$**

Rotacija u zglobu D6 - kut između srednje i distalne falange (Slika 18) označen s  $\theta_1$ :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{16} &= \mathbf{r}_{34} \times \mathbf{r}_{21} - L_{34} \\
 &\quad \cdot L_{21} \cdot \sin \theta_1(t) \\
 &= -(y_4 - y_3) \cdot (x_1 - x_2) + (x_4 - x_3) \cdot (y_1 - y_2) \\
 &\quad - L_{34} \cdot L_{12} \cdot \sin \theta_1(t) = 0
 \end{aligned}
 \tag{38}$$



**Slika 18. Model šake sa prikazom kuta  $\theta_1$**

Prethodno napisana kinematička ograničenja objedinjena u vektor  $\Phi$  (vektor ukupnih kinematičkih ograničenja) glasi [7]:

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - L_{34}^2 \\ (x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 - L_{56}^2 \\ (x_8 - x_7)^2 + (y_8 - y_7)^2 - L_{78}^2 \\ x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ x_5 - x_4 \\ y_3 - y_2 \\ x_7 - x_6 \\ y_7 - y_6 \\ x_8 - x_8^*(t) \\ y_8 - y_8^*(t) \\ -(y_7 - y_8) - L_{78} \sin \theta_4(t) \\ -(y_8 - y_7) \cdot (x_5 - x_6) + (x_8 - x_7) \cdot (y_5 - y_6) - L_{78} \cdot L_{56} \cdot \sin \theta_3(t) \\ -(y_6 - y_5) \cdot (x_3 - x_4) + (x_6 - x_5) \cdot (y_3 - y_4) - L_{56} \cdot L_{43} \cdot \sin \theta_2(t) \\ -(y_4 - y_3) \cdot (x_1 - x_2) + (x_4 - x_3) \cdot (y_1 - y_2) - L_{34} \cdot L_{12} \cdot \sin \theta_1(t) \\ = 0 \end{array} \right\} \quad 39$$

Daljnja analiza vektora  $\Phi(\mathbf{q}, t)$  pokazuje kako su jednadžbe ili kvadratne ili linearne što se s ove točke gledišta pokazuje kao prednost kod računanja i izrade programa u *Matlab*-u.

## 8.2 Jacobijeva matrica

Jacobijeva matrica ima veliku ulogu u kinematičkoj i dinamičkoj analizi sustava više tijela. Jacobijeva matrica dobije se parcijalnim deriviranjem vektora kinematičkih ograničenja položaja. U slučaju prirodnih koordinata te uzimajući u obzir da su jednadžbe kinematičkih ograničenja kvadratne ili linearne, tako da će derivirani izrazi u matrici biti linearni ili konstantni. Za slučaj sustava više tijela za model šake, Jacobijeva matrica glasi [7] :

$$J = \begin{bmatrix} -2(x_2 - x_1) & -2(y_2 - y_1) & 2(x_2 - x_1) & 2(y_2 - y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2(x_4 - x_3) & -2(y_4 - y_3) & 2(x_4 - x_3) & 2(y_4 - y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(x_6 - x_5) & -2(y_6 - y_5) & 2(x_6 - x_5) & 2(y_6 - y_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2(x_8 - x_7) & -2(y_8 - y_7) & 2(x_8 - x_7) & 2(y_8 - y_7) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(y_8 - y_7) & x_8 - x_7 & y_8 - y_7 & -(x_8 - x_7) & -(y_5 - y_6) & -(x_5 - x_6) & y_5 - y_6 & x_5 - x_6 \\ -(y_4 - y_3) & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & -(x_4 - x_3) & -(y_1 - y_2) & -(x_1 - x_2) & y_1 - y_2 & x_1 - x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 40$$



### 8.3 Vektori brzina i ubrzanja

Kod vektora brzina, elementi koji su različiti od nule su oni elementi kod kojih jednađbe ograničenja eksplicitno ovise o vremenu. Prema tome, vektor brzina glasi [7]:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{x}_8^*(t) \\ \dot{y}_8^*(t) \\ L_{78} \cdot \cos(\theta_4(t)) \cdot \dot{\theta}_4(t) \\ L_{78} \cdot L_{56} \cdot \cos(\theta_3(t)) \cdot \dot{\theta}_3(t) \\ L_{56} \cdot L_{43} \cdot \cos(\theta_2(t)) \cdot \dot{\theta}_2(t) \\ L_{34} \cdot L_{12} \cdot \cos(\theta_1(t)) \cdot \dot{\theta}_1(t) \end{pmatrix} \quad 41$$

Vektor ubrzanja glasi [7]:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2[(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)] \\ -2[(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) + (\dot{y}_4 - \dot{y}_3)] \\ -2[(\dot{x}_6 - \dot{x}_5) + (\dot{y}_6 - \dot{y}_5)] \\ -2[(\dot{x}_8 - \dot{x}_7) + (\dot{y}_8 - \dot{y}_7)] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{x}_8^*(t) \\ \ddot{y}_8^*(t) \\ L_{78}(-\sin \theta_4(t)) \cdot \ddot{\theta}_4^2(t) + \cos \theta_4(t) \cdot \ddot{\theta}_4(t) \\ -2(-(\dot{y}_8 - \dot{y}_7) \cdot (\dot{x}_5 - \dot{x}_6) + (\dot{x}_8 - \dot{x}_7) \cdot (\dot{y}_5 - \dot{y}_6)) + L_{78} \cdot L_{56} \cdot (-\sin \theta_3(t)) \cdot \ddot{\theta}_3^2(t) + \cos \theta_3(t) \cdot \ddot{\theta}_3(t) \\ -2(-(\dot{y}_6 - \dot{y}_5) \cdot (\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + (\dot{x}_6 - \dot{x}_5) \cdot (\dot{y}_3 - \dot{y}_4)) + L_{56} \cdot L_{43} \cdot (-\sin \theta_2(t)) \cdot \ddot{\theta}_2^2(t) + \cos \theta_2(t) \cdot \ddot{\theta}_2(t) \\ -2(-(\dot{y}_4 - \dot{y}_3) \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \cdot (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)) + L_{34} \cdot L_{12} \cdot (-\sin \theta_1(t)) \cdot \ddot{\theta}_1^2(t) + \cos \theta_1(t) \cdot \ddot{\theta}_1(t) \end{pmatrix} \quad 42$$

## 9 Mjerenje

Sustav ELITE proizvod je tvrtke „BTS Bioengineering“ iz Milana u Italiji. Sustav omogućava praćenje i utvrđivanje prostornih koordinata tzv. markera, koji su zapravo označene točke na tijelu koje se obrađuju u stvarnom vremenu. Kod snimanja se koriste najmanje dvije kamere postavljene u krug radi kvalitetnijeg snimanja pokreta iz svih kuteva. Ponekad se javljaju refleksije tijekom snimanja pa kamere ne mogu prepoznati markere.

Sustav koji se koristio u ovom radu sastoji se od 8 kamera (7 raspoređenih kao na Slici 19 te jedna koja se ne vidi na slici u gornjem lijevom kutu) koje rade na frekvenciji od 100 Hz, a smješten je u laboratoriju za biomehniku Kineziološkog fakulteta u Zagrebu. Kamere imaju ugrađene LED diode koje su sinkronizirane s kamerama i emitiraju infracrvene zrake. Na karakteristične točke na šaci stavljaju se markeri koji primaju reflektirane infracrvene zrake, pretvaraju ih u elektrone, zatim u digitalni zapis koji se šalje natrag u procesor računala. Računalo analizira svaki „frame“ te se na temelju toga izračunavaju koordinate markera u prostoru.



Slika 19. BTS sustav na Kineziološkom fakultetu u Zagrebu

### 9.1 Kalibracija sustava

Prije početka mjerenja, potrebno je definirati radni volumen, tj. prostor u kojem se izvodi mjerenje. U ovom se mjerenju koristi Thor protokol kod kojeg je prvo potrebno definirati globalni koordinatni sustav. Svaki štap predstavlja jednu os, a postavljeni se okvir, prikazan na slici 31, snima deset sekundi. Kada je globalni koordinatni sustav definiran, uzima se jedan štap s markerima i pomiče i rotira u prostoru minutu i pol kako bi se definirao radni volumen.

Isto tako, pomoću tih štapova s markerima, određivao se koordinatni sustav, tj. zadavali su se smjerovi koordinatnih osi.



**Slika 20. Određivanje koordinatnog sustava u radnom volumenu**

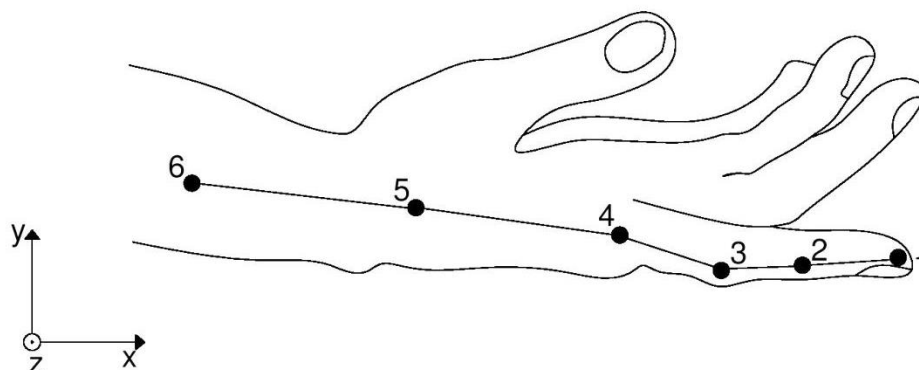
## 9.2 Markeri

Pokret se mjeri pomoću 7 markera od kojih se 5 nalazi na samoj šaci, jedan na podlaktici, jedan referentni je na stolu, a jedan na dinamometru koji pokazuje smjer djelovanja sile, kao što prikazuje Slika 21.



**Slika 21. Prikaz postavljenih markera**

Markeri koji se nalaze na šaci smješteni su na mjestima gdje se nalaze zglobovi na kažiprstu, dakle jedan na vršku prsta (marker 1), i po jedan na DIP(marker 2), PIP (marker 3), MCP (marker 4) zglobovima te jedan na zglobu šake (marker 5). Marker koji se nalazi na podlaktici označen je brojem 6, kao što je prikazano na Slici 22.



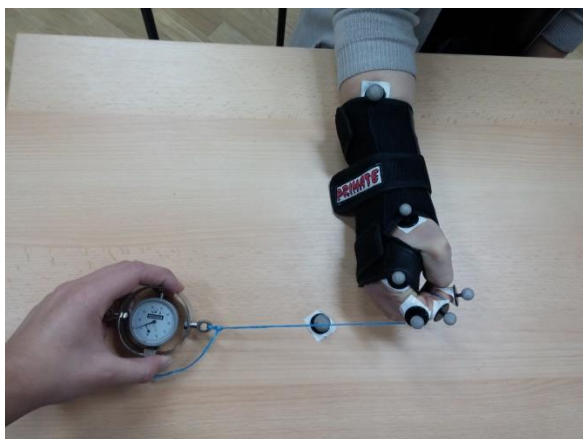
**Slika 22 Definiranje brojeva markera**

### 9.3 Snimanje pokreta

Snimao se pokret koji simulira otvaranje šake i gibanje prstiju kod rehabilitacije pacijenata s perezom šake uslijed moždanog udara. Na ručni je zglob postavljen steznik kako bi se taj zglob ukrutio da bi se dobili što točniji podatci. Prsti su se povlačili užetom na čijem kraju se nalazio dinamometar. Na sredini segmenta II djeluje sila konstantnog iznosa koja se mjeri pomoću dinamometra, a koja iznosi 2N. Ta sila djeluje u smjeru konca kojim je segment II povezan sa dinamometrom. Budući da se pokret odvija u ravnini koja je okomita na smjer djelovanja gravitacijske sile, gravitacijska sila nije uzeta u obzir. Dakle, jedina vanjska sila koja djeluje na sustav je sila kojom se povlači dinamometar.

Ispitanica je 24-godišnja djevojka koja nema povijesti bolesti vezanih uz gornje ekstremitete.

Pokret koji se mjeri je fleksija-ekstenzija šake (Slika 23). Fleksija predstavlja pokret u zglobu kojim dolazi do savijanja odnosno pregibanja. Stiskanjem šake postiže se fleksija prstiju. Suprotno tome, opružanje šake naziva se ekstenzija. Na sljedećoj su slici prikazane fleksija i ekstenzija prstiju šake. Potrebno je mjeriti jedan ciklus fleksije-ekstenzije.



Slika 23. Fleksija i ekstenzija šake

#### 9.4 Matrica mase

Potrebni parametri koji se mjere na modelu su duljine pojedinačnih segmenata (u matematičkom modelu opisanih kao kruta tijela označena brojevima I-IV). Mase tih segmenata (kostiju i pripadajućih mišića) preuzete su iz literature[11]. Polarni momenti tromosti izračunati su na način da su oblici segmenata aproksimirani valjcima, a računaju se prema izrazu:

$$I = \frac{ml^2}{3} + \frac{mr^2}{4} \quad 44$$

Pretpostavlja se da je središte mase svakog segmenta na polovici njegove duljine. Pregled masa, duljina segmenata i polarnih momenata tromosti dan je u Tablici 11.

**Tablica 11. Prosječne antropometrijske vrijednosti za falange ženskog kažiprsta [11]**

Segment	Masa [kg]	Duljina [m]	Polumjer [m]	Polarni moment tromosti [kg m <sup>2</sup> ]
<b>I</b>	0,007	0,02101	0,0075	1,28x10 <sup>-8</sup>
<b>II</b>	0,014	0,01910	0,0075	1,899x10 <sup>-8</sup>
<b>III</b>	0,030	0,03008	0,0100	9,798x10 <sup>-8</sup>
<b>IV</b>	0,662	0,07717	0,0150	1,351x10 <sup>-8</sup>

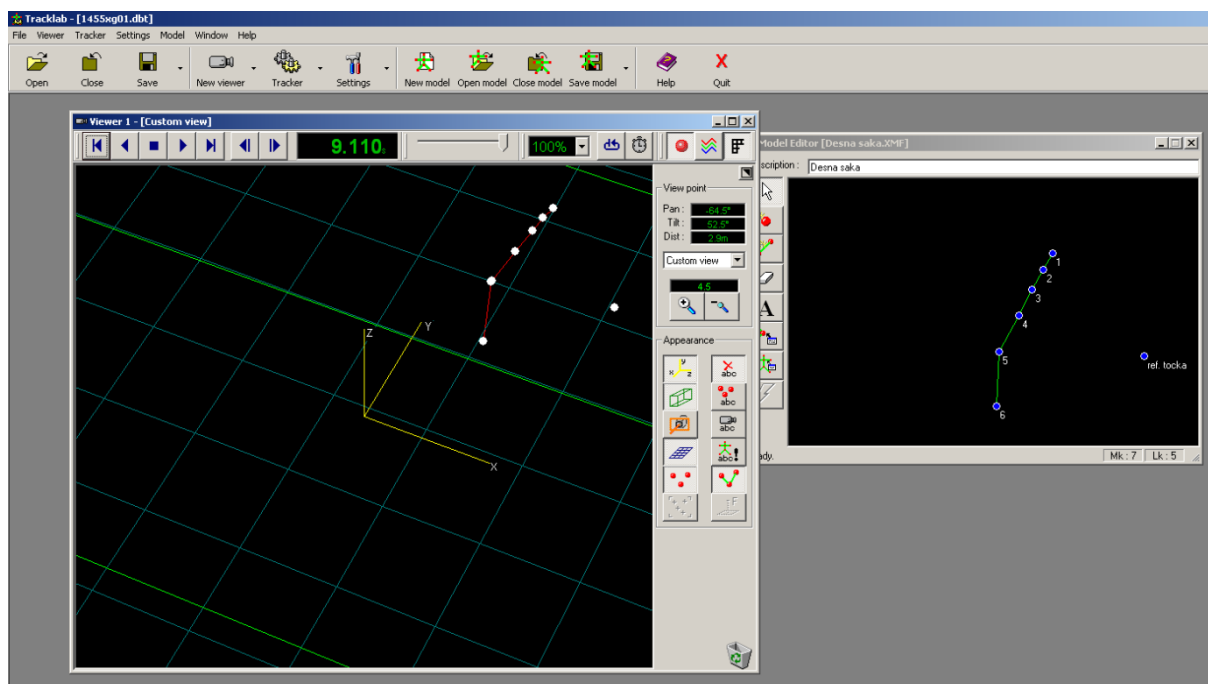
Navedene mase uključuju masu kosti, kao i okolnih tkiva.

Izlazni podatci koji se očekuju su pomaci, brzine i ubrzanja točaka, isto kao i kutevi  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ . Matrica mase glasi:

45

## 9.5 Kinematički podatci

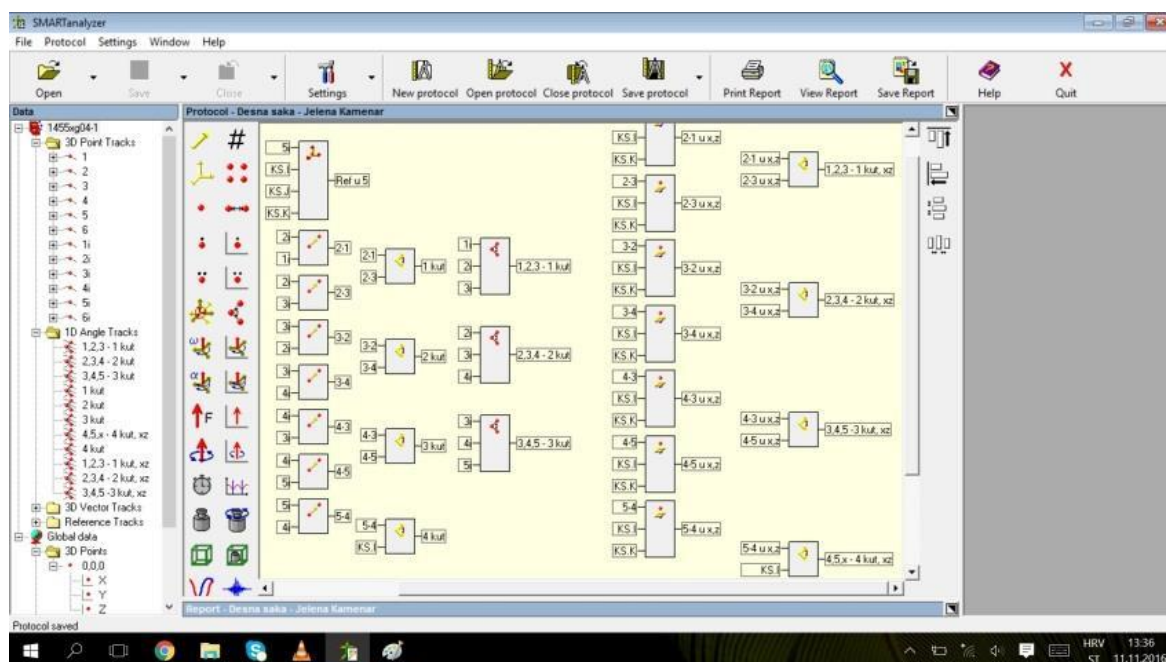
Nakon samog snimanja, podatci su dobiveni pomoću programa *Tracklab* i *Smart Analyzer*, a postupak analize podataka prikazan na Slici 24. Slika 24 prikazuje markere u radnom volumenu koji su međusobno povezani linijama. Potrebne koordinate, kutevi, brzine i ubrzanja potom su ubačeni u *Excel* kako bi se mogli koristiti u *Matlab*-u za daljnju dinamičku analizu.



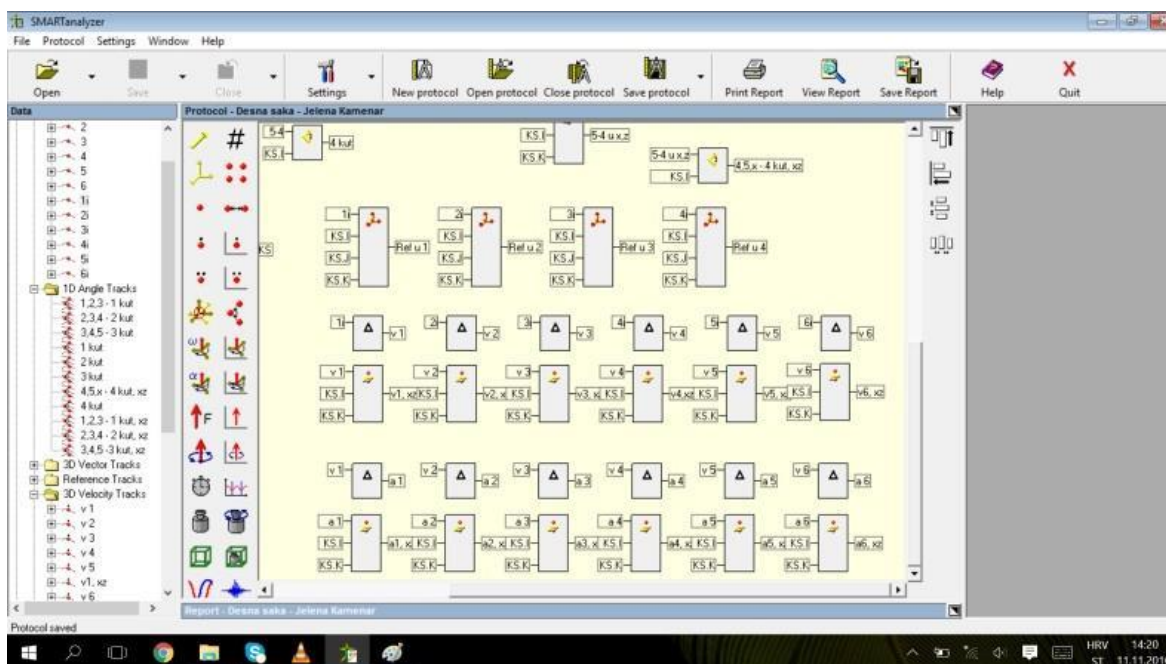
Slika 24. Postupak analize podataka u *Smart Analyzer*-u



Protokol za računanje koordinata i kuteva prikazan je na Slici 25, a protokol za brzine i ubrzanja na Slici 26.



Slika 25. Smart Analyzer - protokol za koordinate i kuteve



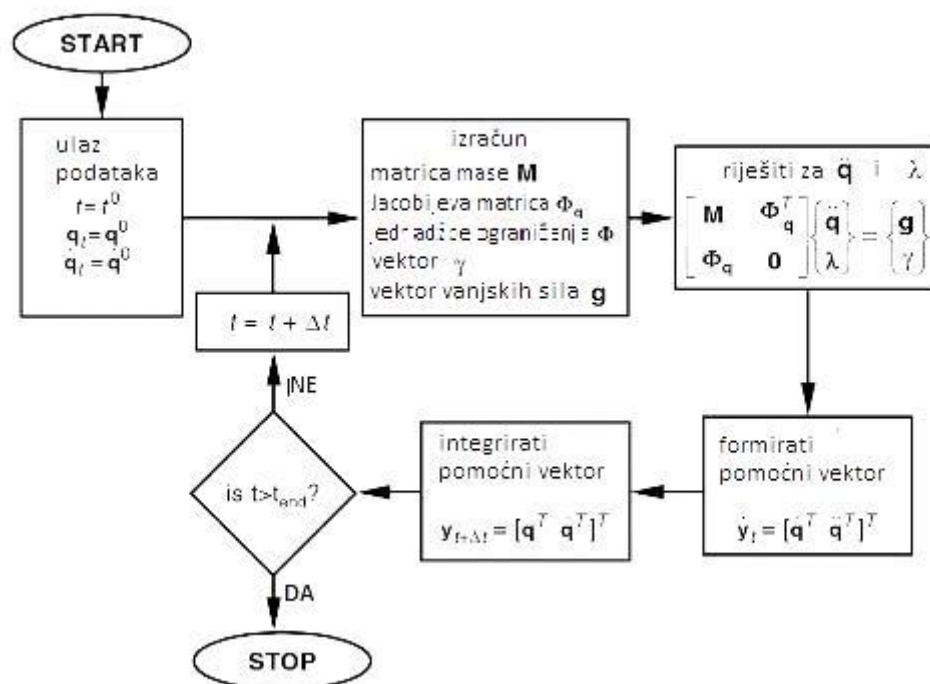
Slika 26. Smart Analyzer - protok za brzine i ubrzanja



## 10 REZULTATI

Napisan je program za kinematičku i dinamičku analizu u programskom paketu *Matlab* (Prilog I,II). U kinematičkoj analizi, računa se položaj, brzine i ubrzanja pojedinih točaka u svakom trenutku pokreta (fleksije i ekstenzije šake) koji je trajao 6,35 s.

Kod dinamičke analize, potrebni su podatci o masama, momentima tromosti te vanjskim silama, kako bi izračunali unutarnje sile i momente kod navedenog pokreta. Na Slici 27 prikazan je dijagram toka za program u *Matlab*-u, a koji pokazuje redoslijed operacija kod računanja.

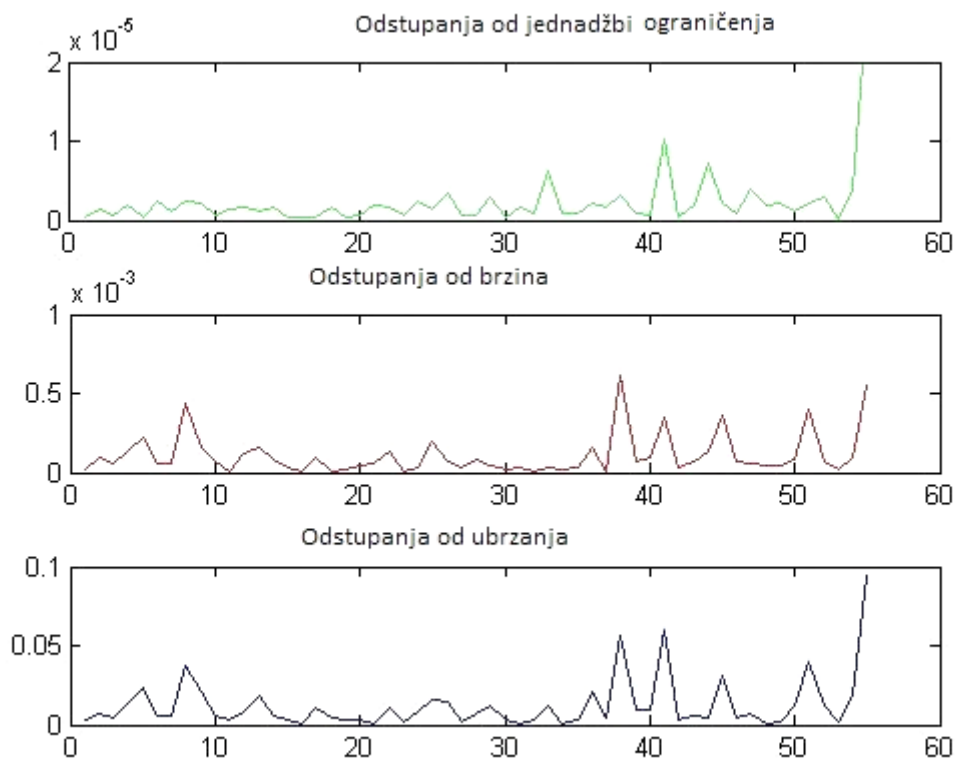


Slika 27 Dijagram toka za program u *Matlab*-u

Jedan od načina da se utvrdi da li je analiza bila uspješna i valjana je da se izračuna norma vektora  $\Phi, \dot{\Phi}, \ddot{\Phi}$  na svakom koraku analize. Norma vektora koristi se u proračunu relativne greške u reprezentaciji vektora ili matrice u računalu. U numeričkoj su matematici norme izuzetno važne funkcije jer se koriste u brojnim analizama. Ocjena greške približnog rješenja nekog problema ili ispitivanje konvergencije iterativnih procesa su samo od nekih problema gdje su norme zauzele važno mjesto. Za uspješnu analizu, vrijednosti norme vektora bi trebale biti što bliže nuli.

Kao što je vidljivo na Slici 28, vrijednosti norma vektora  $\Phi, \dot{\Phi}, \ddot{\Phi}$  koje se nalaze na ordinati blizu su nule, što govori da su sljedeći grafovi koji će biti prikazani u ovom radu vjerodostojni. Vrijednosti na apscisi predstavljaju broj *frame*-ova. *Frame* je broj frekvencijskih okvira ili slika koje se stvaraju tijekom snimanja. U ovom su se snimanju,

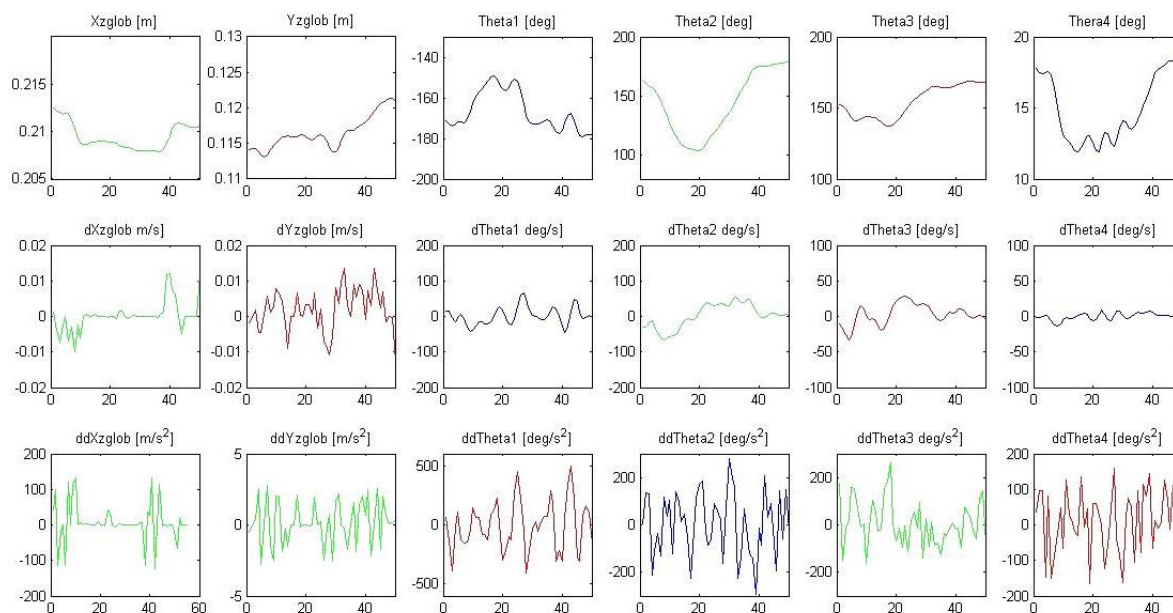
*frame*-ovi snimali svakih 0,01 s. Dakle, kroz 6,35 s, snimljeno je 635 *frame*-ova. U programskom paketu *Matlab*, korak vremena je 0,1 s. Za vrijeme od 6.35 s to je 63 *frame*-a.



**Slika 28. Statistička analiza rezultata**

## 10.1 Rezultati kinematičke analize

Na Slici 29 prikazani su dijagrami za gibanja u zglobovima. Podatci su filtrirani te interpolirani pomoću kubne parabole, dok su brzine i ubrzanja izračunate njezinim diferenciranjem.



**Slika 29. Kinematički podaci gibanja u zglobovima (redom s lijeva na desno: D1,D2,D3,D4,D5,D6) gdje prvi red prikazuje položaj, drugi brzinu, a treći ubrzanje**

Podatci na Slici 29 pokazuju jedan ciklus fleksije-ekstenzije šake. Prvi red grafova pokazuje položaj ručnog zgloba, te iznose kutova  $\theta_1$  do  $\theta_4$ . Na svim je grafovima na apscisi prikazan broj *frame*-ova.

U prvom redu, na prvom grafu na ordinati su prikazane koordinate apscise položaja ručnog zgloba u metrima. Na drugom grafu prvog reda, na ordinati su prikazane vrijednosti koordinata ordinate ručnog zgloba, izražene u metrima. Ordinate sljedeća četiri grafa prikazuju iznose kutova kod rotacije zglobova D3, D4, D5, D6, izraženih u stupnjevima.

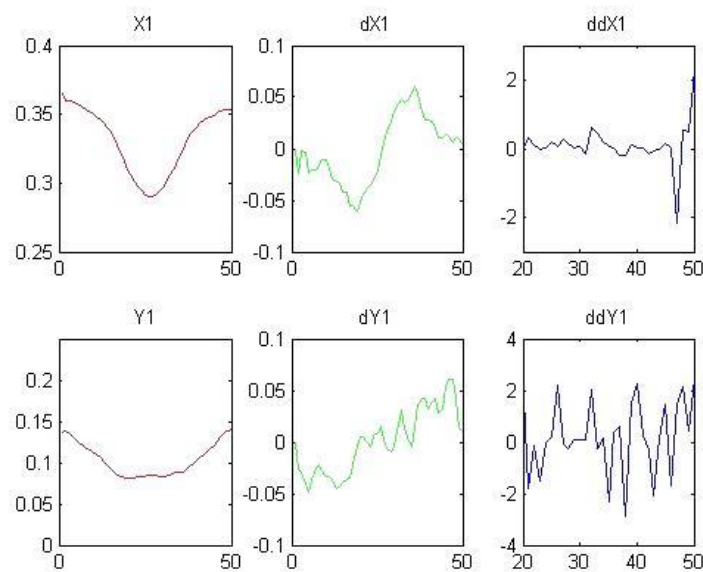
Drugi red pokazuje brzinu gibanja ručnog zgloba u m/s, odnosno promjene kuta u vremenu, stupnjeva/s.

Treći red su vrijednosti ubrzanja. Za prva dva grafa koja prikazuju ubrzanje ručnog zgloba te su vrijednosti na ordinate izražene u  $\text{m/s}^2$ , odnosno u stupnjeva/ $\text{s}^2$  za četiri zadnja grafa koja prikazuju rotacijske zglobove D3-D6.

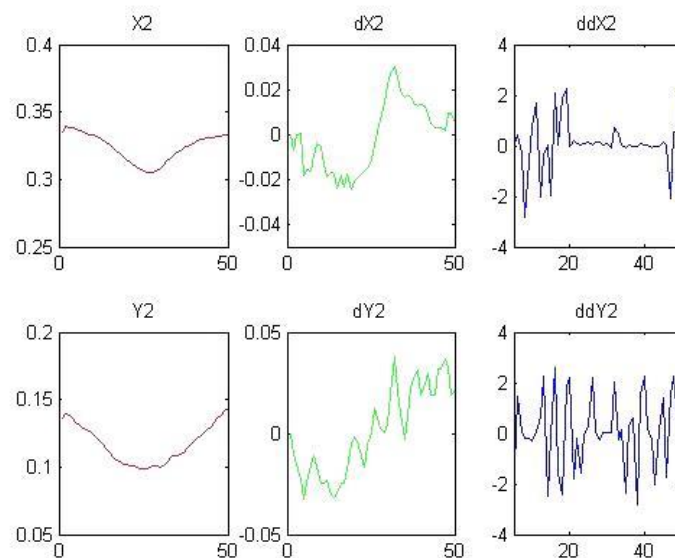
Napravljena je i analiza položaja, brzine i ubrzanja 8 karakterističnih točaka modela (točke *P1* do *P8*) koje su prikazane na Slikama 30-37. Pomaci su izraženi u metrima, brzine u m/s, a ubrzanja u  $\text{m/s}^2$ . Iz analize je vidljivo da su rezultati u pogledu brzina kompatibilni s rezultatima položaja, a rezultati ubrzanja sa rezultatima brzina.

Apsolutne vrijednosti brzina ne prelaze 0,5 m/s, a u mnogim je slučajevima brzina manja od 0,05 m/s. Podatci za točke koje se nalaze u istim okretnim zglobovima su jednaki, što govori da su kinematičke veze dobro postavljene.

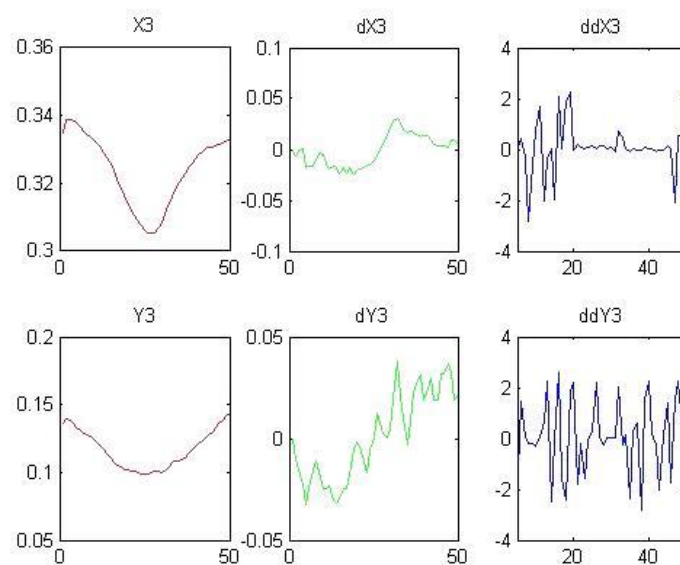
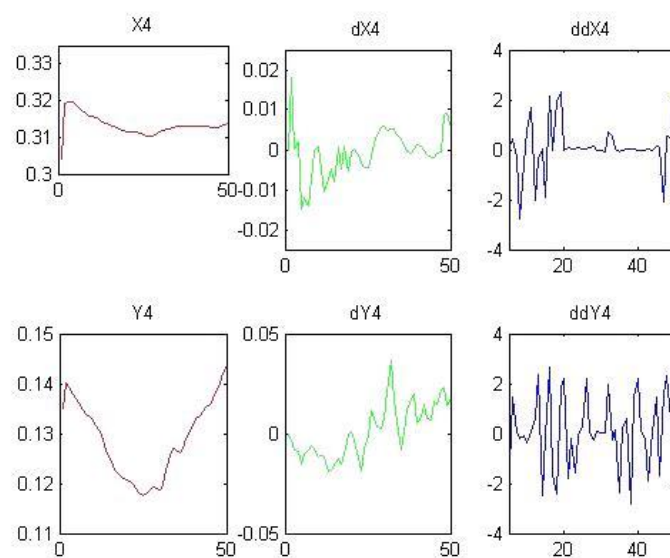
Apsolutne vrijednosti ubrzanja ne prelaze  $4 \text{ m/s}^2$ , međutim, te vrijednosti dosta osciliraju.

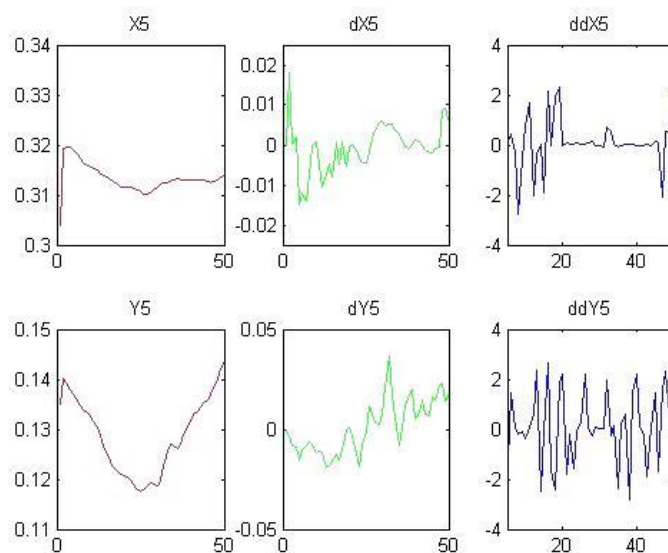
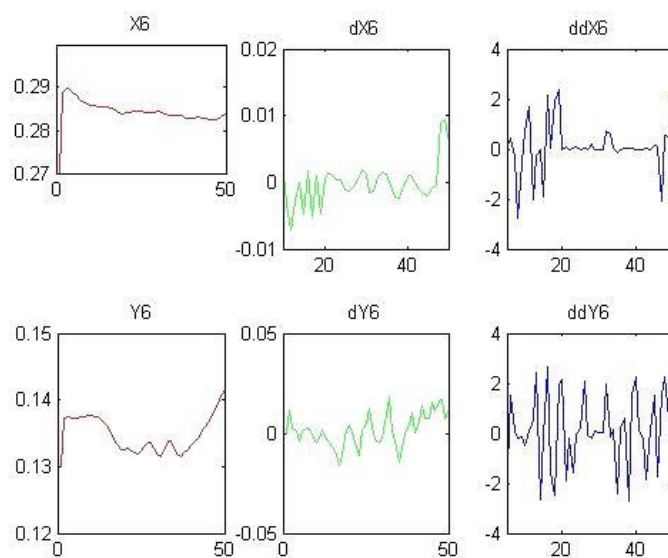


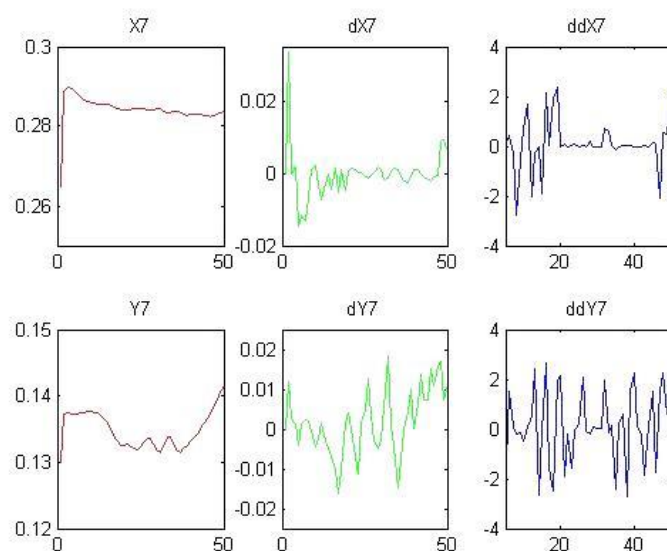
**Slika 30. Kinemtički podatci za točku 1**



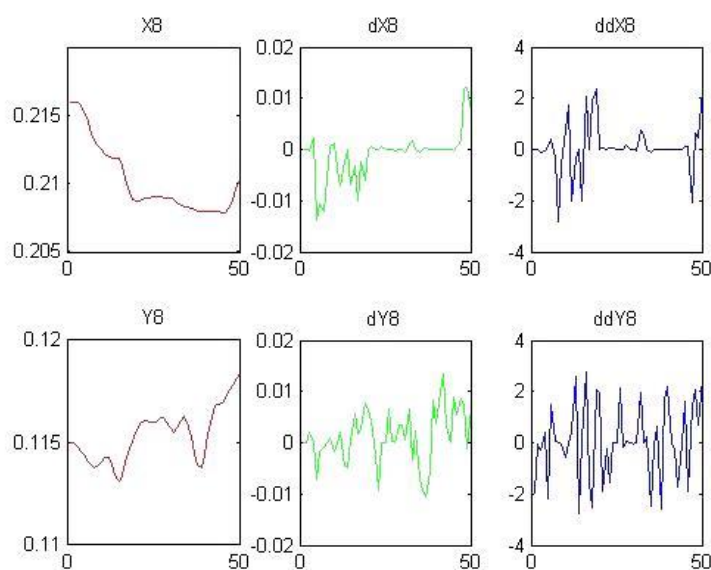
**Slika 31. Kinematički podatci za točku 2**

**Slika 32. Kinematički podatci za točku 3****Slika 33. Kinematički podatci za točku 4**

**Slika 34. Kinematički podatci za točku 5****Slika 35. Kinematički podatci za točku 6**



Slika 36. Kinematički podatci za točku 7



Slika 37. Kinematički podaci za točku 8

## 10.2 Rezultati dinamičke analize

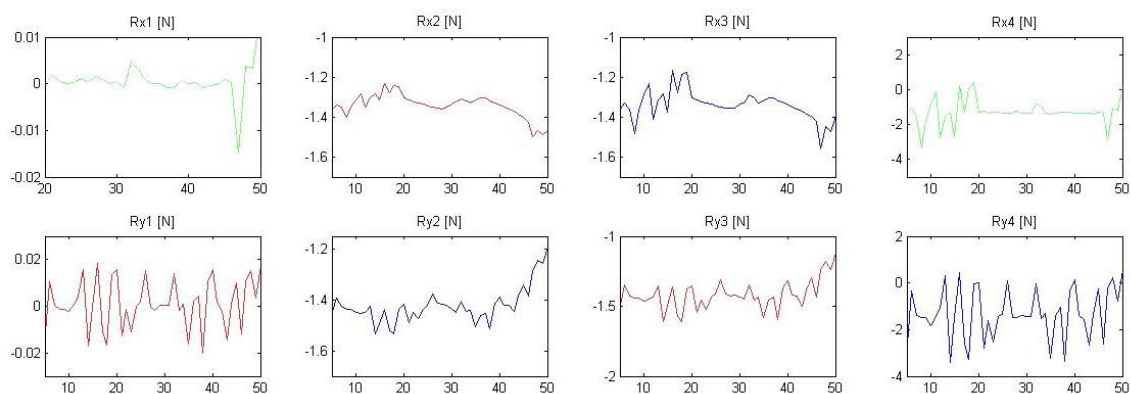
Rezultati dinamičke analize odnose se na reakcijske sile te momente u zglobovima (Slika 38). Oznake  $R_{x1}$  te  $R_{y1}$  označavaju iznos sile u zglobovima R1 u smjeru osi  $x$ , odnosno osi  $y$ , oznake



$R_{x2}$  te  $R_{y2}$  iznos sile u zglobu R2 u smjeru navedenih osi,  $R_{x3}$  i  $R_{y3}$  označavaju iznos sile u zglobu R3, dok  $R_{x4}$  i  $R_{y4}$  označavaju iznos sile u ručnom zglobu. Na apscisi je prikazan broj *frame*-ova, dok su na ordinati prikazani iznosi sile u zglobovima izraženi u N.

Analiza sljedećih grafova pokazuje da su reakcije u zglobu R1 praktički jednake nuli, što je i bilo za očekivati budući da se gravitacijska sila nije uzimala u obzir, a na tijelo I nije djelovala nikakva vanjska sila budući da je uže koje je s jedne strane bilo vezano na dinamometar, s druge bilo vezano na segment II. Sitne varijacije vrijednosti odnose se na komponente tromosti koje se mijenjaju tijekom pokreta.

U zglobovima R2 i R3 (te također u točki na ručnom zglobu), može se uočiti da reakcijske sile sve više dosežu iznos sile izmjerene dinamometrom. Ovaj je rezultat također bio očekivan budući da ne djeluje gravitacijska sila te zbog toga što su sile inercije male, budući da je iznos akceleracije također mali, što je dokaz da je model smislen i da slijedi postavljene pretpostavke.



**Slika 38. Reakcijske sile u šaci**

Na Slici 39 prikazani su momenti koji se stvaraju na zglobovima tijekom pokreta. Ovo je važan podatak jer u najvećoj mjeri pokazuje kako rehabilitacijski uređaj djeluje na šaku. Na apscisi je prikazan broj *frame*-ova, dok su na ordinati iznosi momenata u Ncm. Moment M1 odnosi se na moment u zglobu R1, moment M2 u zglobu R2, M3 u zglobu R3 te M4 na moment u ručnom zglobu. Negativna se vrijednost momenata pojavljuje u odnosu na odabrani koordinatni sustav.

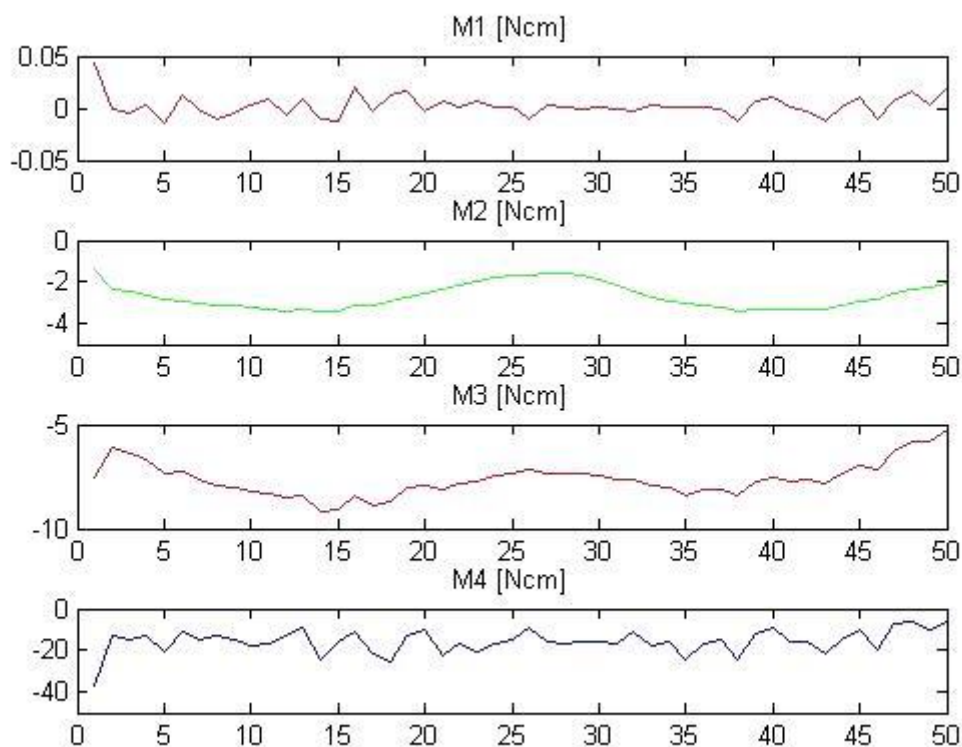
Može se primijetiti kako je moment na zglobu R1 gotovo jednak nuli, budući da na tijelo I ne djeluje nikakva sila.

Nadalje, ako se gledaju grafovi, može se primijetiti kako su krivulje sličnog ponašanja u svim zglobovima, a polako rastu prema ručnom zglobu. To je razumljivo, budući da se povećava krak djelovanja sile.

Isto tako je važno naglasiti da apsolutno veće vrijednosti momenata odgovaraju maksimalnoj ekstenziji, a manje vrijednosti maksimalnoj fleksiji. To znači da se kod pregibanja događa ekscentrična kontrakcija ručnih ekstenzora umjesto kontrakcije ručnih fleksora. Ekscentrična



kontrakcija mišića je vrsta aktivacije koji povećava napetost na mišiću, a u isto vrijeme se mišić produljuje i smanjuje se njegov poprečni presjek. Ekscentrična kontrakcija najčešće se javlja kada se mišić protivi jačoj sili te je on prisiljen istezati se. Ako i djeluje koji fleksor, onda je to u među-kontrakciji s ekstenzorom s ciljem stabilizacije pokreta.



**Slika 39. Prikaz momenata u zglobovima R1, R2, R3 te ručnom zglobu**

## 11 ZAKLJUČAK

U ovom su radu, nakon provedenih mjerenja u laboratoriju za biomehaniku Kineziološkog fakulteta u Zagrebu, dobiveni rezultati kinematičke i dinamičke analize gibanja šake kod izvođenja pokreta fleksije i ekstenzije u svrhu rehabilitacije nakon bolesti ili pretrpljene ozljede. Mjerenja su provedena na 24-godišnjoj djevojci koja nema povijesti bolesti vezanih uz gornje udove. Pokret koji se mjerio je fleksija i ekstenzija, odnosno zatvaranje i otvaranje desne šake. Mjerenje, te kasnija analiza u *Matlab*-u, je provedena s ciljem dobivanja podataka o iznosima sila i momenata koji se pojavljuju tijekom tog pokreta. Ti su podatci važni kod analize karakteristika rehabilitacijskog uređaja potrebnih kod njegovog konstruiranja, a u svrhu efikasnijeg provođenja rehabilitacije.

Model je, uz neophodna pojednostavljenja, pokušao što više opisati prirodnu biomehaniku ljudske šake, koristeći prosječne antropometrijske vrijednosti potrebnih podataka kao što su duljina ili masa segmenata šake.

Kinematička je analiza opisala gibanje u zglobovima, tj. njihov položaj, brzinu i ubrzanje. Vidljivo je bilo iz te analize da apsolutne vrijednosti brzina ne prelaze 0,5 m/s, dok apsolutne vrijednosti ubrzanja ne prelaze 4 m/s<sup>2</sup>.

Dinamičkom su analizom dobiveni iznosi sila i momenata u zglobovima. Sila i moment u zglobovima R1 bili su približno jednaki nuli, što je bilo očekivano budući da je vanjska sila mjerena dinamometrom, konstantnog iznosa 2 N, djelovala na segmentu II. U zglobovima R2, R3 te ručnom zglobovima se iznos sile približavao iznosu od 2 N. Iznosi momenata rasli su od zgloba R2, preko R3, pa do ručnog zgloba, što je razumljivo jer se prema ručnom zglobovima povećavao krak djelovanja vanjske sile.

Najvažniji rezultati su podatci koji se odnose na momente koji se pojavljuju u šaci, budući da veće vrijednosti momenata odgovaraju maksimalnoj ekstenziji, a manje vrijednosti maksimalnoj fleksiji. Iznosi momenata nam pokazuju kako su tijekom pokreta, najviše aktivni bili ekstenzori šake, dok su fleksori djelovali s ciljem stabilizacije pokreta. Dakle, rehabilitacijski uređaj bi, prema ovim analizama, najviše djelovao na ekstenzore.

To je iznimno važno kako bi se mogla tretirati točno određena skupina mišića šake, te kako bi se uspješno mogla provesti prava terapija u svrhu vraćanja normalne funkcije šake prilikom rehabilitacije.

## 12 LITERATURA

- [1] Freivalds, A., *BIOMECHANICS OF THE UPPER LIMBS: Mechanics, Modeling, and Musculoskeletal Injuries*, CRC Press LLC, 2004.
- [2] <http://www.slideshare.net/ssuserc33ffb/wrist-and-hand-rucni-zglob-i-saka>, 07.05.2016.
- [3] Matovinović Osvatić, Martina: *Biomehanika šake u bolesnika s akromegalijom*, Zagreb: Medicinski fakultet, 2010.
- [4] <https://fizioterra.wordpress.com/2015/01/03/funkcionalna-anatomija-i-biomehanika-sake/>, 06.05.2016.
- [5] Vlačić, Zlatko: *Ispitivanje biomehaničkih karakteristika modificiranih šavova fleksornih tetiva na animalnom modelu*, Zagreb: Medicinski fakultet, 2009.
- [6] [http://automatizacija1.etf.rs/udzb\\_robotika.html](http://automatizacija1.etf.rs/udzb_robotika.html), 14.06.2016.
- [7] Musiolik, Agnieszka : *Multibody model of the human hand for the dynamic analysis of a hand rehabilitation device*, Universidade Tecnica de Lisboa, 2008.
- [8] Gleick, J.: *Kaos – rađanje nove znanosti*, Izvori, Zagreb, 1996.
- [9] Zlatić, Sanja: *Kaotično ponašanje iteracijskog procesa u Newtonovoj metodi – Newtonov fraktal*, *Chaotic behaviour in Newton iterative process approach – Newton's fractal*, Technical journal 7, 4(2013), 347-354
- [10] Terze, Z., Eiber, A.: *Introduction to Dynamics of Multibody Systems*, interna e-skripta za kolegij “Dinamika konstrukcijskih sustava”- dio objavljen u Dynamics, In: Mechanics, e-book, Institute B of Mechanics, University of Stuttgart, pp. 190-300, (EU classification CZ/98/1/82500/PI/i.1.1.b/FPI), 2001.
- [11] Biryukova, E.V., Yourovskaya, V.Z.: *A model of human hand dynamics. Advances in the biomechanics of the hand and wrist* (pp. 107-122), New York: Plenum, 1994.

# PRILOZI

## PRILOG I –Kinematička analiza

```
% deklaracija varijabli
clear all;
clc;
close all;
nc = 16; %broj koordinata
nh = 10; %broj jednadžbi kinematičkih uvjeta
nd = 6; %broj stupnjeva slobode
nh_total = nh+nd; %broj jednadžbi
q = zeros(nc,1);
q_dot = zeros(nc,1);
q_2dot = zeros(nc,1);
Phi = zeros(nh_total,1); %vektor jednadžbi kinematičkih uvjeta
Phi_q = zeros(nh_total,nc); %Jacobian matrica
niu=zeros(nh_total,1); %vektor brzina
gamma=zeros(nh_total,1); %vektor ubrzanja
% podatci modela
L1=0.025;%m
L2=0.017;%m
L3=0.035;%m;
L4=0.085;%m;
L=[L1 L2 L3 L4];
errorUser=1*10^-5;
%analiza modela:
t0 = 0.0;
dt = 1/10;
t_end = 6.35;
load 'drivers1.txt';
drivers=drivers1;
n=size(drivers,1);
%početak kinematičke analize
t = t0;
q =[0.365 0.137 0.335 0.136 0.335 0.136 0.304 0.135 0.304 0.135 0.265 0.130 0.265 0.130 0.216 0.115]';
while t<=t_end
% analiza položaja pomoću Newton-Raphson-ove metode
error=errorUser;
while error>=errorUser
[Phi,Phi_q,niu,gamma]=Function_evaluation(t,q,q_dot,Phi,Phi_q,L,drivers,niu,gamma,nc,nh_total,nd);
delta_q=-Phi_q\Phi;
error=sqrt(delta_q'*delta_q);
q=q+delta_q;
end
% analiza brzina
q_dot=Phi_q\niu;
% analiza ubrzanja
q_2dot=Phi_q\gamma;
% animacija rezultata
newplot;
hold on;
axis ([0.0 0.5 -0.25 0.25]); axis equal; axis manual;
for j=1:nc/2
x(j,1) = q(1+2*(j-1),1);
y(j,1) = q(2+2*(j-1),1);
end
plot(x,y);
clear x y;
pause(0.1);
hold off;
% vrijeme
t=t+dt;
end
```

## PRILOG II – Dinamička analiza

```

    %čišćenje radnog prostora
clear all;
close all;
%
% opis modela
%
nc = 16;
nh = 10;
nd = 6;
nh_total = nh+nd; % T
% prosječne duljine segmenata
L1 = 0.02101; %m
L2 = 0.01910; %m
L3 = 0.03008; %m;
L4 = 0.07717; %m;
L_data = [L1 L2 L3 L4];
% radijus kosti
r1 = 0.0075; %m
r2 = 0.0075; %m
r3 = 0.010; %m
r4 = 0.015; %m
% masa pojedinog segmenta
M1 = 0.007;
M2 = 0.014;
M3 = 0.030;
M4 = 0.662;
M_data = [M1 M2 M3 M4];
%momenti tromosti (za valjak:  $J = (m \cdot l^2) / 3 + (m \cdot r^2 / 4)$ )
J1_G = (M1*L1^2)/3 + (M1*r1^2)/4;
J2_G = (M2*L2^2)/3 + (M2*r1^2)/4;
J3_G = (M3*L3^2)/3 + (M3*r1^2)/4;
J4_G = (M4*L4^2)/3 + (M4*r1^2)/4;
J_G_data = [J1_G J2_G J3_G J4_G];
% lokalni koordinatni sustavi središta mase svakog segmenta
rG(1:2,1) = [L1/2 0.0]';
rG(1:2,2) = [L2/2 0.0]';
rG(1:2,3) = [L3/2 0.0]';
rG(1:2,4) = [L4/2 0.0]';
% vanjska sila
r_mass = [0.2*9.81 2]'; % masa 0.2 kg koja djeluje na segment II
r_force = [0.1*L2 0]'; % lokalne koordinate točke u kojoj djeluje sila
%fiksirane koordinate - za animaciju

r_link = [0.1100 0.1390]'; % koordinate točke na podlaktici
r_anchor = [0.4 0.2]'; % koordinate referentne točke (uređaj)
%podaci analize:
t0 = 0.0;
dt = 1/10;
t_end = 6.35;
Baum_data = [ 50.0 50.0 ]; % stabilizacija
load drivers1.txt;
drivers=drivers1;
n=size(drivers,1);
%početak dinamičke analize - početna točka
q = [0.365 0.137 0.335 0.136 0.335 0.136 0.304 0.135 0.304 0.135 0.265 0.130 0.265 0.130 0.216 0.115]';
q_dot = [0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0]';
Y_0 = [q; q_dot];
% metoda direktne integracije
t_stat = cputime;
[t , Y] = ode45(@Solve_EofM_ODE45, [t0 t_end], Y_0, [], L_data, M_data, J_G_data, rG, Baum_data, drivers,
r_mass, r_force, r_anchor, nc, nh_total, nd);
% podaci iz varijabli (pozivaju se funkcije)
i_rep = 1;
w_rep = 26;
t_report = t0;
for i = 1:size(t)
    if t(i) >= t_report
        [q_2dot_aux, lambda_aux, data_aux] = Solve_EofM(t(i), Y(i,1:nc)', Y(i,nc+1:2*nc)', L_data, M_data, J_G_data,
rG, Baum_data, drivers, r_mass, r_force, r_anchor, nc, nh_total, nd);
        t_rep(i_rep) = t(i);
        q_rep(i_rep,1:nc) = Y(i,1:nc);
        q_dot_rep(i_rep,1:nc) = Y(i,nc+1:2*nc);
        q_2dot_rep(i_rep,1:nc) = q_2dot_aux';
        % reakcije i vanjske sile
        lambda_rep(i_rep,1:nh_total-6) = lambda_aux(1:nh_total-6,1)';
        lambda_rep(i_rep,nh_total-5) = -lambda_aux(nh_total-5,1);
        lambda_rep(i_rep,nh_total-4) = -lambda_aux(nh_total-4,1);
        % izračunavanje momenata
        lambda_rep(i_rep,nh_total-3) = -lambda_aux(nh_total-3,1)*L_data(4)*cos(data_aux(10,1));
        lambda_rep(i_rep,nh_total-2) = -lambda_aux(nh_total-2,1)*L_data(4)*L_data(3)*cos(data_aux(9,1));
        lambda_rep(i_rep,nh_total-1) = -lambda_aux(nh_total-1,1)*L_data(3)*L_data(2)*cos(data_aux(8,1));
        lambda_rep(i_rep,nh_total) = -lambda_aux(nh_total-0,1)*L_data(2)*L_data(1)*cos(data_aux(7,1));
        data_rep(i_rep,1:w_rep) = data_aux';
    end
end

```

```

i_rep = i_rep + 1;
t_report = t_report + dt;
end
end
% podaci sa mjerenja
load LabKinematics.txt;
for i = 1:i_rep-1
    j=1;
    while LabKinematics(j,1)<=t_rep(i)
        j=j+1;
    end
    for k = 1:nc
        if LabKinematics(j,1) == t_rep(i)
            q_kin(i,k) = LabKinematics(j-1,2+k);
        else
            q_kin(i,k) = LabKinematics(j-1,2+k) + (LabKinematics(j,2+k)-LabKinematics(j-1,2+k))*(t_rep(i)-
            LabKinematics(j-1,2))/(LabKinematics(j,2)-LabKinematics(j-1,2));
        end
    end
end
t_stat = (cputime - t_stat)/60;
disp('Gotovo!');
disp('Vidjeti podatke:');
Iterations = size(t,1)
Elapsed_CPU_time = t_stat
disp('Stisni ENTER za animaciju rezultata');
pause
% Plot mjerenja LAB Kinematics
for j=1:nc/2
    x(j,1) = q_kin(i,1+2*(j-1));
    y(j,1) = q_kin(i,2+2*(j-1));
end
plot(x,y,'-o','Color',[0.5 0.5 0.5],'LineWidth',1,'MarkerEdgeColor',[0.5 0.5 0.5],'MarkerFaceColor','w');
clear x y;
% % Plot vektora sila
x(1,1) = r_anchor(1,1);
y(1,1) = r_anchor(2,1);
x(2,1) = data_rep(i,25);
y(2,1) = data_rep(i,26);
x(3,1) = data_rep(i,25) + 0.05*data_rep(i,23);
y(3,1) = data_rep(i,26) + 0.05*data_rep(i,24);
plot(x(1:2,1),y(1:2,1),'-x','Color','k','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k');
plot(x(2:3,1),y(2:3,1),'-<','Color','c','LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','c','MarkerFaceColor','c');
% Plot ruke i šake
for j = 1:nc/2
    x(j+3,1) = q_rep(i,1+2*(j-1));
    y(j+3,1) = q_rep(i,2+2*(j-1));
end
x(12,1) = r_link(1,1);
y(12,1) = r_link(2,1);
plot(x(4:11,1),y(4:11,1),'-o','Color','b','LineWidth',3,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r');
plot(x(11:12,1),y(11:12,1),'s','Color','b','LineWidth',3,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r');

clear x y;
for j = 1:4
    x_aux = [q_rep(i,1+2*(2*j-1)) q_rep(i,1+2*(2*j-1))]';
    y_aux = [q_rep(i,2+2*(2*j-1)) q_rep(i,2+2*(2*j-1))]';
    M_rep = round(250.0*lambda_rep(i,17-j));
    if M_rep >= 0
        M_rep = M_rep + 1;

        plot(x_aux,y_aux,'-
        o','Color','g','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','g','MarkerFaceColor','g','MarkerSize',M_rep);
    else
        M_rep = M_rep - 1;
        plot(x_aux,y_aux,'-*','Color','r','LineWidth',1,'MarkerEdgeColor','r','MarkerFaceColor','r','MarkerSize',-
        M_rep);
    end
end
clear x y;
F = getframe(gca);
mov =addframe(mov,F);
pause(0.3);
hold off;
end
mov = close(mov);
%Plot (statistika)
figure;
H = subplot(3,1,3);
subplot(3,1,1), plot(data_rep(10:64,1), 'g' );
hold on;
axis([0 60 0 0.00002])
title('Constraint violation')
subplot(3,1,2), plot(data_rep(10:64,2), 'r' );
hold on;
axis([0 60 0 0.001])

```

```

title('Velocity of constraint violation')
subplot(3,1, 3), plot(data_rep(10:64,3), 'b');
hold on;
axis([0 60 0 0.1])
title('Acceleartion of constraint violation')
%Plot gibanja u zglobovima
figure;
H = subplot(3,6,18);
subplot(3,6, 1), plot(data_rep(10:64,5), 'g');
hold on;
axis([0 50 0.205 0.22])
title('Xzglob [m]')
subplot(3,6, 2), plot(data_rep(10:64,6), 'r ');
hold on;
axis([0 50 0.11 0.13])
title('Yzglob [m]')
subplot(3,6, 3), plot(-data_rep(10:64,7)*180/pi, 'b');
hold on;
axis([0 50 -200 -130])
title('Theta1 [deg]')
subplot(3,6, 4), plot(data_rep(10:64,8)*180/pi, 'g');
hold on;
axis([0 50 80 200])
title('Theta2 [deg]')
subplot(3,6, 5), plot(data_rep(10:64,9)*180/pi, 'r ');
hold on;
axis([0 50 100 200])
title('Theta3 [deg]')
subplot(3,6, 6), plot(data_rep(10:64,10)*180/pi, 'b');
hold on;
axis([0 50 10 20])
title('Thera4 [deg]')
subplot(3,6, 7), plot(data_rep(10:64,11), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.02 0.02])
title('dXzglob m/s']')
subplot(3,6, 8), plot(data_rep(10:64,12), 'r ');
hold on;
axis([0 50 -0.02 0.02])
title('dYzglob [m/s]')
subplot(3,6, 9), plot(data_rep(10:64,13)*180/pi, 'b');
hold on;
axis([0 50 -200 200])
title('dTheta1 deg/s]')
subplot(3,6, 10), plot(data_rep(10:64,14)*180/pi, 'g');
hold on;
axis([0 50 -200 200])
title('dTheta2 deg/s]')
subplot(3,6, 11), plot(data_rep(10:64,15)*180/pi, 'r ');
hold on;
axis([0 50 -100 100])
title('dTheta3 [deg/s]')
subplot(3,6, 12), plot(data_rep(10:64,16)*180/pi, 'b ');
hold on;
axis([0 50 -100 100])
title('dTheta4 [deg/s]')
subplot(3,6, 13), plot(data_rep(10:64,17)*180/pi, 'g');
hold on;
title('ddXzglob [m/s^2]')
subplot(3,6, 14), plot(data_rep(10:64,18), 'g');
hold on;
axis([0 50 -5 5])
title('ddYzglob [m/s^2]')
subplot(3,6, 15), plot(data_rep(10:64,19)*180/pi, 'r');
hold on;
axis([0 50 -600 600])
title('ddTheta1 [deg/s^2]')
subplot(3,6, 16), plot(data_rep(10:64,20)*180/pi, 'b ');
hold on;
axis([0 50 -300 300])
title('ddTheta2 [deg/s^2]')
subplot(3,6, 17), plot(data_rep(10:64,21)*180/pi, 'g');
hold on;
axis([0 50 -300 300])
title('ddTheta3 deg/s^2]')
subplot(3,6, 18), plot(data_rep(10:64,22)*180/pi, 'r ');
hold on;
axis([0 50 -200 200])
title('ddTheta4 [deg/s^2]')
%Plot reakcije
figure;
H = subplot(3,4,12);
subplot(3,4, 1), plot(lambda_rep(:,5), 'g');
hold on;
axis([20 50 -0.02 0.01])
title('Rx1 [N]')
subplot(3,4, 2), plot(lambda_rep(:,7), 'r ');

```

```

hold on;
axis([5 50 -1.7 -1])
title('Rx2 [N]')
subplot(3,4, 3), plot(lambda_rep(:,9), 'b');
hold on;
axis([5 50 -1.7 -1])
title('Rx3 [N]')
subplot(3,4, 4), plot(lambda_rep(:,11), 'g');
hold on;
axis([5 50 -5 3])
title('Rx4 [N]')
subplot(3,4, 5), plot(lambda_rep(:,6), 'r ');
hold on;
axis([5 50 -0.03 0.03])
title('Ry1 [N]')
subplot(3,4, 6), plot(lambda_rep(:,8), 'b');
hold on;
axis([5 50 -1.7 -1.15])
title('Ry2 [N]')
subplot(3,4, 7), plot(lambda_rep(:,10), 'r ');
hold on;
axis([5 50 -2 -1])
title('Ry3 [N]')
subplot(3,4, 8), plot(lambda_rep(:,12), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 2])
title('Ry4 [N]')
A=lambda_rep(:,6);
B=lambda_rep(:,5);
subplot(3,4, 9), plot(A,B, 'r ');
hold on;
axis([-0.05 0.05 -0.05 0.05])
title('Ry1(Rx1)')
C= lambda_rep(:,8);
D=lambda_rep(:,7);
subplot(3,4, 10), plot(C,D, 'b ');
hold on;
axis([-2 -1 -2 0])
title('Ry2(Rx2)')
E= lambda_rep(:,10);
F=lambda_rep(:,9);
subplot(3,4, 11), plot(E,F, 'r ');
hold on;
axis([-2 -1 -2 -1])
title('Ry3(Rx3)')
G=lambda_rep(:,12);
H=lambda_rep(:,11);
subplot(3,4, 12), plot(G, H, 'b');
hold on;
axis([-5 5 -5 5])
title('Ry4(Rx4)')
%Plot (momenti)
figure;
H = subplot(4,1,4);
subplot(4,1, 1), plot(lambda_rep(:,16), 'r');
hold on;
axis([0 50 -0.0005 0.0005]);
title('M1 [Nm]')
subplot(4,1, 2), plot(lambda_rep(:,15), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0]);
title('M2 [Nm]')
subplot(4,1, 3), plot(lambda_rep(:,14), 'r');
hold on;
axis([0 50 -0.1 -0.0001]);
title('M3 [Nm]')
subplot(4,1, 4), plot(lambda_rep(:,13), 'b ');
hold on;
axis([0 50 -0.5 0]);
title('M4 [Nm]')

% Plot (kinematika)
% X1, Y1
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3, 1), plot( q_rep(:,1), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.25 0.4]);
title('X1')
subplot(2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,1), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.1 0.1]);
title('dX1')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,1), 'b ');
hold on;
axis([20 50 -3 3])

```



```

title('ddX1')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,2), 'r');
hold on;
axis([0 50 0 0.25]);
title('Y1')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,2), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.1 0.1]);
title('dY1')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,2), 'b ');
hold on;
axis([20 50 -4 4])
title('ddY1')
% X2, Y2
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3,1), plot( q_rep(:,3), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.25 0.4])
title('X2')
subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,3), 'g');
hold on;
axis([20 50 -0.04 0.05])
title('dX2')
axis([0 50 -0.05 0.04])
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,3), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddX2')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,4), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.05 0.2])
title('Y2')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,4), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0.05])
title('dY2')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,4), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddY2')

% X3, Y3
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3,1), plot( q_rep(:,5), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.3 0.36]);
title('X3')
subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,5), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.1 0.1]);
title('dX3')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,5), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddX3')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,6), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.05 0.2]);
title('Y3')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,6), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0.05])
title('dY3')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,6), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddY3')
% X4, Y4
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(3,3,1), plot( q_rep(:,7), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.3 0.335]);
title('X4')
subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,7), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.025 0.025])
title('dX4')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,7), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddX4')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,8), 'r');
hold on;

```

```

axis([0 50 0.11 0.15]);
title('Y4')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,8), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0.05]);
title('dY4')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,8), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddY4')
% X5, Y5
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3,1), plot( q_rep(:,9), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.3 0.34]);
title('X5')
subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,9), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.025 0.025]);
title('dX5')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,9), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddX5')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,10), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.11 0.15]);
title('Y5')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,10), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0.05]);
title('dY5')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,10), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddY5')
% X6, Y6
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(3,3,1), plot( q_rep(:,11), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.27 0.30]);
title('X6')
subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,11), 'g');
hold on;
axis([10 50 -0.01 0.02]);
title('dX6')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,11), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4]);
title('ddX6')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,12), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.12 0.15]);
title('Y6')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,12), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.05 0.05]);
title('dY6')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,12), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddY6')
% X7, Y7
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3,1), plot( q_rep(:,13), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.25 0.30])
title('X7')

subplot (2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,13), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.02 0.035])
title('dX7')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,13), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddX7')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,14), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.12 0.15])
title('Y7')
subplot (2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,14), 'g');
hold on;

```

```
axis([0 50 -0.025 0.025])
title('dY7')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,14), 'b ');
hold on;
axis([5 50 -4 4])
title('ddY7')
% X8, Y8
figure;
H = subplot(2,3,6);
subplot(2,3,1), plot( q_rep(:,15), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.205 0.22])
title('X8')
subplot(2,3, 2), plot( q_dot_rep(:,15), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.02 0.02])
title('dX8')
subplot(2,3, 3), plot( q_2dot_rep(:,15), 'b ');
hold on;
axis([0 50 -4 4])
title('ddX8')
subplot(2,3,4), plot( q_rep(:,16), 'r');
hold on;
axis([0 50 0.11 0.12])
title('Y8')
subplot(2,3, 5), plot( q_dot_rep(:,16), 'g');
hold on;
axis([0 50 -0.02 0.02])
title('dY8')
subplot(2,3, 6), plot( q_2dot_rep(:,16), 'b ');
hold on;
axis([0 50 -4 4])
title('ddY8')
```